

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

# ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM III • ZESZYT I

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
WARSZAWA 1954

# SPIS TREŚCI

	Str.
J. Groszkowski — O „indukcyjności“ łuku i „pojemności“ dynatronu . . . . .	3
A. Smoliński — Niektóre zastosowania teorii filtrów elektrycznych do wzmacniaczy szerokopasmowych dolnoprzepustowych . . . . .	31
J. L. Jakubowski — Kryteria eliminacji oporności falowej przy odbiciach wielokrotnych . . . . .	69
A. Kiliński — Wartość ścisła przewodności linii obciążonej równomiernie w $n$ punktach . . . . .	103

# СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Я. Грошковский — Об „индуктивности“ дуги и „ёмкости“ динатрона . . . . .	3
А. Смолински — Некоторые применения теории электрических фильтров к широкополосным усилителям нижних частот . . . . .	31
И. Л. Якубовский — Критерии элиминации волнового сопротивления при многократных отражениях . . . . .	69
А. Килински — Точное значение входной полной проводимости линии нагруженной равномерно в $n$ точках . . . . .	103

# CONTENTS — SOMMAIRE

	Pag.
J. Groszkowski — The „inductanse“ of the arc and the „capacitance“ of the dynatron . . . . .	3
A. Smoliński — Some applications of the theory of electric filters for wide-band low-pass amplifiers . . . . .	31
J. L. Jakubowski — Critères de l'élimination de l'impédance caractéristique de la ligne en cas des réflexions multiples . . . . .	69
A. Kiliński — The exact value of input admittance in a line loaded uniformly at $n$ points . . . . .	103



POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

# ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM III • ZESZYT 1

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
WARSZAWA 1954

R A D A R E D A K C Y J N A :

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,  
PROF. IGNACY MALECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN,  
PROF. STANISŁAW SZPOR

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y :

*Redaktor Naczelny*

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

*Z-ca Redaktora Naczelnego*

PROF. PAWEŁ NOWACKI

*Sekretarz*

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

A D R E S R E D A K C J I :

Warszawa — Politechnika, ul. Koszykowa 75

Zakład Elektroniki PAN

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — W A R S Z A W A 1954

Nakład 674+100	Oddano do składania 16/XI. 1953
Ark. wyd. 9,75, druk. 8	Podpisano do druku 13/III. 1954
Papier dr. sat. 60 g 70×100/16 V kl.	Druk ukończono 24/III 1954
Cena zł 10,-	Zamówienie nr 817/171 K-5-10255

POZNAŃSKA Drukarnia Naukowa — POZNAŃ, FREDRY 10



621.396.611

J. GROSZKOWSKI

## O „indukcyjności” łuku i „pojemności” dynatronu

*Rękopis dostarczono 14. 4. 1953.*

**Streszczenie.** Praca ma na celu wykazanie, że rozróżnianie przyczyny i skutku w oporach ujemnych, tzn. przyjmowanie w oporach typu łuku wewnętrznej indukcyjności (prąd — przyczyną, napięcie — skutkiem), w oporach zaś typu dynatronu — wewnętrznej pojemności (napięcie — przyczyną, prąd — skutkiem) nie jest niezbędne do uzasadnienia szeregu zależności, związanych z zachowaniem się tych oporów.

W części pracy dotyczącej stanów przejściowych w układach „opór nieliniowy ujemny + opór liniowy dodatni” wyprowadzono wyrażenia na czas trwania przeskoku prądu (bądź napięcia) przy przechodzeniu układu od stanu równowagi chwiejnej do stanu równowagi trwałej i wykazano, że znikomo małe indukcyjności (dla oporu łukowego) lub pojemności (dla oporu dynatronowego) siedliskujące w doprowadzeniach, zaciskach itp. wystarczają do ilościowego wyjaśnienia zjawisk przejściowych bez potrzeby wprowadzania elementów magazynujących energię do samych oporów nieliniowych.

W części pracy dotyczącej ustalonego stanu oscylacji w układach „opór ujemny nieliniowy + obwód rezonansowy” wyjaśniono pozorne występowanie w łuku indukcyjności, w dynatronie — pojemności, wywołane przesunięciem fazy między przebiegami podstawowymi napięcia i prądu; przesunięcie to jest wynikiem odchyłania się częstotliwości generatora od częstotliwości rezonansowej obwodu wskutek występowania harmonicznych, co jest zgodne z rozważaniami podanej przez autora teorii równowagi mocy urojonych w nieliniowych układach generacyjnych.

### 1. WSTĘP

W szeregu prac dotyczących stabilności układów z oporami ujemnymi nieliniowym typu łuku i typu dynatronu [1, 2, 13, 14, 15, 17] w celu uzasadnienia stabilności zarówno dla oporu rzeczywistego (dla prądu stałego), jak i dla obwodów rezonansowych (dla prądów zmiennych) zakłada się istnienie — jako czynnika o znaczeniu podstawowym — pewnych elementów o charakterze reaktancji, a mianowicie w oporach typu łuku zakłada się istnienie indukcyjności, w oporach typu dynatronu — pojemności. Ta wewnętrzna indukcyjność (w łuku) oraz wewnętrzna pojemność (w dyna-



tronie) mają — zdaniem niektórych autorów — odgrywać zasadniczą rolę, jeśli chodzi o stabilność układu zarówno dla prądu stałego, jak i dla przebiegów oscylacyjnych.

Wielu z autorów za pomocą tych elementów wyraża pewne właściwości, jakie przypisują oni dwom zasadniczym typom oporów ujemnych, a mianowicie występowanie opóźnień czasowych między przyczyną a skutkiem; tak więc w oporach typu łuku przyczyną ma być prąd płynący w łuku, skutkiem zaś — opóźnione w czasie napięcie na łuku, natomiast w oporach typu dynatronu przyczyną ma być napięcie na dynatronie, skutkiem zaś opóźniony w czasie prąd w obwodzie dynatronu. W ten sposób zakłada się istnienie w oporach typu łuku szeregowej indukcyjności, w oporach zaś typu dynatronu — równoległej pojemności.

Nie ma wątpliwości, iż opory ujemne mogą mieć takie właściwości i często właściwości te w nich występują; a więc łuk (lub lampa jarzeniowa) wykazuje rodzaj indukcyjności, która jest wywołana bezwładnością przebiegów jonowych, związanych ze zjawiskami cieplnymi [11], dynatron zaś wykazuje pojemność, która odpowiada pojemności międzyelektrodowej lampy dynatronowej; również może w dynatronie występować pewne opóźnienie wywołane przebiegami czasowymi, związanymi z mechanizmem emisji wtórnej, jednak w tym ostatnim przypadku czasy opóźnień są tak znikomo małe [4], iż wchodziłyby w grę dopiero przy częstotliwościach zakresu mikrofalowego. Istnienie tych opóźnień nie usprawiedliwia zachowania się rozważanych oporów ujemnych, zwłaszcza w przypadku bardzo małych częstotliwości, w zakresie których zawsze można przeprowadzać zarówno teoretyczną, jak i doświadczalną analizę pracy układów.

Poniższe rozważania mają na celu wykazanie, że do teoretycznego uzasadnienia szeregu zależności występujących w oporach ujemnych nieliniowych nie jest niezbędne zakładanie istnienia wewnętrznych elementów charakteru reaktancyjnego.

Jeśli chodzi o pewne elementy magazynujące energię, których obecność w związku z istniejącymi zakrzywieniami charakterystyk okazuje się niezbędna, zwłaszcza przy rozważaniach stanów przejściowych w układzie oporu ujemnego nieliniowego z oporem liniowym (dla prądu stałego), to obecność takich elementów nie koniecznie musi być związana z samym oporem nieliniowym. Do uzasadnienia zachodzących zjawisk oraz do ich ujęcia matematycznego wystarcza uwzględnienie wielkości reaktancyjnych (indukcyjności lub pojemności), siedliskujących w przewodach doprowadzeniowych między oporem ujemnym a dołączanym oporem; oczywiście wielkości szkodliwe pojemności i indukcyjności własnych (rozproszonych) dołączanego do oporu ujemnego układu elektrycznego mogą się tu również przyczynić w pewnym stopniu.



Natomiast w przypadku rozważania współpracy oporu ujemnego nieliniowego z obwodem rezonansowym w stanie ustalonym lub prawie ustalonym (tzn. o wolno zmieniającej się amplitudzie) nieliniowość charakterystyki pociąga za sobą odkształcenie przebiegów elektrycznych w obwodzie rezonansowym; w zależności od stopnia odkształcenia otrzymane przebiegi są bądź prawie-sinusoidalne, bądź bardzo odkształcone, lub też nawet relaksacyjne. Na przykład w przypadku układu pracującego niezbyt daleko od stanu granicznego przebiegi są prawie-sinusoidalne, niemniej jednak występujące wskutek zakrzywień charakterystyki harmoniczne powodują to, iż częstotliwość (podstawowa) generatora nie jest równa częstotliwości rezonansowej obwodu (tj. takiej częstotliwości, dla której reaktancja obwodu rezonansowego jest równa zeru). To odchylenie częstotliwości pociąga za sobą przesunięcie fazy między napięciem podstawowym a prądem podstawowym obwodu rezonansowego. Znak reaktancji, a zatem kierunek przesunięcia fazy (wyprzedzenie czy opóźnienie) zależy od rodzaju obwodu. Dla obwodów prostych<sup>1</sup> w przypadku obwodu szeregowego reaktancja jest ujemna (pojemnościowa), w przypadku obwodu równoległego — dodatnia (indukcyjnościowa). Wynika to z warunku równowagi mocy urojonych w nieliniowych układach generacyjnych [7, 8, 9]; zgodnie z tym warunkiem dla obwodów prostych częstotliwość generatora z chwilą wzrostu zawartości harmonicznych zawsze maleje, a więc w stanie pracy poza granicą powstawania drgań będzie zawsze mniejsza od częstotliwości rezonansowej. Ponieważ na zaciskach oporu ujemnego występują napięcia i prądy takie same jak na zaciskach obwodu rezonansowego, zatem to samo przesunięcie fazy między napięciem podstawowym a prądem podstawowym będzie panowało na zaciskach oporu ujemnego.

Teoria liniowa generacji nie bierze pod uwagę obecności harmonicznych i nie uwzględnia ich wpływu na częstotliwość generatora, a przeto z rozważań tej teorii nie otrzymuje się przesunięcia fazy między napięciem i prądem na zaciskach oporu ujemnego. Z tego względu zachodzi konieczność wprowadzenia do tych oporów sztucznego elementu o odpowiedniej reaktancji, a więc do łuku — indukcyjności, do dynatronu — pojemności.

Z chwilą uwzględnienia wynikających z nieliniowości charakterystyki przebiegów harmonicznych, które naruszają równowagę mocy urojonych w układzie i powodują zmianę częstotliwości, od razu otrzymamy omówione wyżej przesunięcia fazowe, niezbędne w teorii liniowej do usprawiedliwienia występowania szeregu zjawisk w układach generacyjnych z oporem ujemnym nieliniowym; w ten sposób unikamy potrzeby wpro-

<sup>1</sup> Obwodami prostymi nazywamy tu obwody, które mogą być sprowadzone do układu jednej indukcyjności i jednej pojemności.

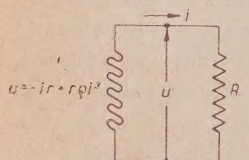


wadzenia do zależności elektrycznych między napięciem i prądem lub między prądem a napięciem pojęć: przyczyny i skutki, pojęć sztucznych, których użycie musi wzbudzać zasadnicze zastrzeżenia.

Tego rodzaju bowiem rozróżnianie między przyczyną a skutkiem należałoby wprowadzić konsekwentnie w odniesieniu np. do siły elektromotorycznej i prądu w ogniwie galwanicznym. Istotnie, gdy zamykamy w sposób nagły wyłącznik obwodu, złożonego z ogniwa o sile elektromotorycznej  $E$  i oporności wewnętrznej  $r$  oraz z oporu zewnętrznego o oporności  $R$ , wówczas, jak wiadomo, prąd w obwodzie nie uzyskuje od razu pełnego swego natężenia określonego równaniem stanu ustalonego  $I = E : (R + r)$ . Czy wobec tego mamy twierdzić, że w ogniwie siła elektromotoryczna jest przyczyną, prąd zaś jest jej skutkiem i że prąd jako skutek opóźnia się względem przyczyny, tj. względem siły elektromotorycznej, i czy mamy przez to przypisywać ogniwu wewnętrzną indukcyjność? Oczywiście, zjawisko opóźnienia prądu względem napięcia wyjaśniamy wprost indukcyjnością całego obwodu, przy czym — w przypadku elementów składowych idealnie rzeczywistych — będą to głównie indukcyjności doprowadzeń. W warunkach normalnych będą to indukcyjności doprowadzeń oraz indukcyjności szkodliwe samych elementów składowych: ogniwa i opornika  $R$ . Podobnie można zanalizować układ ze źródłem stałego prądu, w którym przy zamknięciu obwodu z oporem wskutek istnienia pojemności doprowadzeń napięcie na oporze będzie się opóźniało względem prądu; do wytłumaczenia tego zjawiska nie będzie potrzebne uważanie prądu za przyczynę a napięcia za skutek i przypisywanie samemu źródłu prądu specjalnych cech charakteru pojemnościowego.

## 2. STANY PRZEJŚCIOWE W UKŁADACH „OPÓR UJEMNY + OPÓR RZECZYWISTY”

Założymy, że opór ujemny ma charakterystykę nieliniową symetryczną trzeciego stopnia, wyrażającą się równaniem



$$u = -r(1 - \rho i^2)i = -ri + \rho i^3, \quad (1)$$

gdzie

$r$  — oporność ujemna w najbliższym otoczeniu środka symetrii,

$\rho$  — współczynnik nieliniowości.

Rys. 1: Układ „opór ujemny + opór rzeczywisty“

Ten opór ujemny jest połączony z oporem rzeczywistym (dodatnim)  $R$ , jak to przedstawiono na rys. 1.

Założymy, że

$$R = r + \delta r \quad (2)$$



i napiszmy dla tego oporu równanie

$$u_R = Ri = (r + \delta r)i. \quad (3)$$

Dla układu jak na rys. 1 będziemy mieli związek

$$u + u_R = -ri + r\varrho i^3 + ri + i\delta r = 0, \quad (4)$$

czyli

$$i(\delta r + r\varrho i^2) = 0. \quad (5)$$

Rozwiązanie równania (5) daje trzy pierwiastki

$$i' = 0, \quad i'' = \sqrt{-\frac{\delta r}{r\varrho}} = i_0, \quad i''' = -\sqrt{-\frac{\delta r}{r\varrho}} = -i_0. \quad (6)$$

Rozwiązanie  $i' = 0$  występuje zawsze; jeśli chodzi o pozostałe dwa pierwiastki, są one rzeczywiste tylko wówczas, gdy

$$\frac{\delta r}{r\varrho} < 0, \quad (7)$$

a więc przy  $r > 0$ , gdy  $\varrho$  i  $\delta r$  mają znaki różne, tzn. gdy  $\varrho\delta r < 0$ .

Wynika stąd, iż warunkiem występowania trzech rozwiązań jest: dla charakterystyki typu łuku (tj. dla  $\varrho > 0$ )

$$\delta r < 0, \quad \text{czyli } R < r,$$

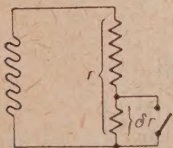
dla charakterystyki typu dynatronu (tj. dla  $\varrho < 0$ )

$$\delta r > 0, \quad \text{czyli } R > r.$$

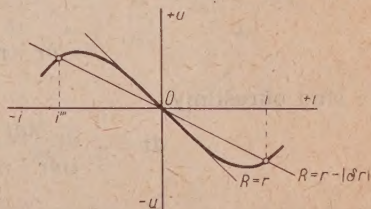
Rozważmy teraz układ w stanie przejściowym, gdy prąd  $i$  przechodzi nagle od wartości 0 do jednej z dwóch wartości:  $i''$  lub  $i'''$ <sup>2</sup>. Ponieważ w każdym momencie czasu powinno być spełnione równanie

$$u + u_R = 0, \quad (8)$$

<sup>2</sup> Tego rodzaju nagłe przejście od wartości 0 do wartości  $i''$  lub  $i'''$  można sobie wyobrazić w układzie jak na rys. 2, gdzie przy wyłączniku otwartym stan układu



Rys. 2. Układ pozwalający na nagłe odejście od stanu granicznego



Rys. 3. Dwa stany pracy na charakterystyce nieliniowej

jest graniczny, tzn. prosta oporu  $R$  jest styczna do charakterystyki nieliniowej (rys. 3); z chwilą zamknięcia wyłącznika opór  $R = r$  maleje do wartości  $R' = r - |\delta r|$ , a więc otrzymujemy dodatkowo dwa punkty przecięcia odpowiadające prądowi  $i''$ , bądź  $i'''$ .

przeto musimy wprowadzić do równania (4) pewną wielkość  $\delta x$  nie przesądzając na razie, z jaką częścią obwodu: z oporem ujemnym czy z oporem dodatnim wielkość ta ma być związana.

Zamiast równania (4) napiszemy teraz

$$u + u_R = -ri + rqi^3 + i\delta x + ri + i\delta r = 0. \quad (9)$$

Stąd

$$i[(\delta r + \delta x) + rqi^2] = 0. \quad (10)$$

Rozwiązanie równania (10) daje

$$i' = 0, \quad i'' = \sqrt{-\frac{\delta r + \delta x}{r_0}}, \quad i''' = -\sqrt{-\frac{\delta r + \delta x}{r_0}}. \quad (11)$$

Ponieważ rozwiązania określone równaniami (6) nadal pozostają w mocy, przeto dla stanu ustalonego musi oczywiście być  $\delta x = 0$ . Wielkość  $\delta x$  jest więc funkcją zmian prądu w czasie, która przy stałym natężeniu prądu musi być równa zeru; zatem

$$\delta x = f\left(\frac{di}{dt}\right). \quad (12)$$

Załóżmy, że wielkość  $\delta x$  wyraża się zależnością

$$\delta x = \lambda \frac{\left(\frac{di}{i}\right)}{\frac{dt}{dt}} = \frac{\lambda}{i} \frac{di}{dt}. \quad (13)$$

Wówczas po podstawieniu wyrażenia (13) do równania (10) otrzymamy

$$\delta r + rqi^2 + \frac{\lambda}{i} \frac{di}{dt} = 0, \quad (14)$$

a stąd określimy

$$dt = -\frac{\lambda di}{i(\delta r + rqi^2)} = -\frac{\lambda}{\delta r} \frac{di}{i\left(1 + \frac{r_0}{\delta r} i^2\right)}. \quad (15)$$

Zgodnie z warunkiem (7) musi być  $\frac{\delta r}{r_0} < 0$ , a zatem  $-\frac{\delta r}{r_0} > 0$ .

Oznaczając

$$-\frac{\delta r}{r_0} = i_0^2, \quad (16)$$



Równanie (15) napiszemy jako

$$dt = -\frac{\lambda}{\partial r} \frac{dz}{z(1-z^2)}, \quad (17)$$

gdzie

$$z^2 = \frac{i^2}{i_0^2}. \quad (18)$$

Rozwiązanie równania (17) ma postać

$$t = -\frac{\lambda}{\partial r} \ln(z \sqrt{1-z^2}) + C = -\frac{\lambda}{\partial r} \ln \left[ \frac{i}{i_0} \sqrt{1 - \left( \frac{i}{i_0} \right)^2} \right] + C. \quad (19)$$

Wyrażenie (19) wiąże natężenie prądu  $i$  z czasem  $t$  w stanie przejściowym. Dla  $t_1 = 0$  powinno być  $i = 0$ , dla  $t_2 = \tau$  powinno być  $i = i_0$ . Wówczas  $\tau = t_2 - t_1$  będzie czasem trwania skoku prądu od wartości  $i = 0$  do wartości  $i = i_0$ .

Znajdujemy z (19)

$$\tau = t_2 - t_1 = -\frac{\lambda}{\partial r} \int_{z=0}^{z=1} \frac{dz}{z(1-z^2)} = -\frac{\lambda}{\partial r} \left[ \ln \left( \frac{i}{i_0} \right) \sqrt{1 - \left( \frac{i}{i_0} \right)^2} \right]_{i=0}^{i=i_0}. \quad (20)$$

Ponieważ dla  $i = 0$  i  $i = i_0$  otrzymuje się wartości nieskończenie wielkie, znajdujemy czas trwania przebiegu nieustalonego nie między  $i = 0$  i  $i = i_0$ , lecz między  $i = i_0 \Delta_i$  a  $i = i_0 - i_0 \Delta_i$ , gdzie  $\Delta_i$  jest wielkością małą wobec jedności.

Równanie (20) napiszemy więc jako

$$\tau = -\frac{\lambda}{\partial r} \ln \frac{(1-\Delta_i) \sqrt{1-(1-2\Delta_i+\Delta_i^2)}}{\Delta_i \sqrt{1-\Delta_i^2}} = -\frac{\lambda}{\partial r} \ln \frac{1-\Delta_i + \Delta_i(2-\Delta_i)}{1-\Delta_i^2} \quad (21)$$

$$= -\frac{\lambda}{\partial r} \ln \sqrt{\frac{2}{\Delta_i}} = -1,15 \frac{\lambda}{\partial r} \lg \frac{2}{\Delta_i}.$$

Dla  $\Delta_i$  zawartych w granicach od  $10^{-1}$  do  $10^{-4}$  wartość  $\lg \frac{2}{\Delta_i}$  zawiera się w granicach między 1,3 a 4,3.

Szukając czasu trwania przeskoku prądu między wartościami np.  $i = 0,0001 i_0$  a  $i = 0,9999 i_0$  otrzymamy

$$\tau = -5 \frac{\lambda}{\partial r}. \quad (22)$$

Przebieg dotychczasowych rozważań nie zależy od tego, czy charakterystyka jest typu łuku ( $\varrho = 0$ ,  $\partial r < 0$ ), czy typu dynatronu ( $\varrho = 0$ ,  $\partial r > 0$ ): wprowadzenie do rozważań wzoru (22) pociąga za sobą konieczność sprecyzowania typu charakterystyki.

## 2.1. Charakterystyka typu łuku

Ponieważ czas  $\tau$  musi być dodatni,  $\partial r$  zaś w przypadku łuku jest ujemne, przeto  $\lambda$  musi być dodatnie. Z założonej postaci wyrażenia (13) wynika, że  $\lambda$  jest pewną indukcyjnością, na której pod wpływem zmian prądu powstaje spadek napięcia

$$i \partial x = \lambda \frac{di}{dt}$$

wyrównujący różnice między przebiegiem charakterystyki ujemnego oporu nieliniowego a przebiegiem linii prostej oporu liniowego. W przypadku charakterystyki nieliniowej typu łuku współczynnik  $\lambda$  odpowiada indukcyjności dodatniej, jaka występuje normalnie w każdym układzie rzeczywistym, choćby np. w jego przewodach połączeniowych.

Wykażemy, że przewód połączeniowy (tzw. doprowadzenie) o niewielkiej nawet długości, łączący opór ujemny z oporem dodatnim obciążenia, wystarczy do uzasadnienia przebiegów, jakie zachodzą w stanie przejściowym w układzie „opór ujemny nieliniowy typu łuku + opór dodatni“.

Jeśli przyjmiemy istnienie przewodu doprowadzeniowego o średnicy drutu  $d = 0.2$  cm i długości zaledwie  $l = 5$  cm, indukcyjność jego obliczymy w przybliżeniu jako

$$2l \left( \ln \frac{4l}{d} - 1 \right) = 2 \cdot 5 \left( 2.3 \lg \frac{4 \cdot 5}{0.2} - 1 \right) \cdot 10^{-9} \approx 3.6 \cdot 10^{-8} H.$$

W przypadku np. łuku Poulsena, gdy przyjmiemy  $\partial r = R - r = 9 - 10 = -1 \Omega$ , otrzymamy na czas przeskoku rozsądną wartość

$$\tau = -5 \frac{3.6 \cdot 10^{-8}}{-1} = 1.8 \cdot 10^{-7} \text{ sek.}$$

Tak więc do wyjaśnienia przebiegów w stanie przejściowym, w przypadku współpracy oporu ujemnego nieliniowego typu łuku z oporem liniowym dodatnim, nie jest potrzebne zakładanie specjalnej indukcyjności związanej z oporem ujemnym; wystarczy uwzględnienie znikomo małej indukcyjności, jaka jest zawsze nierozłącznie związana z każdym rzeczywistym obwodem elektrycznym.



## 2.2. Charakterystyka typu dynatronu

W przypadku charakterystyki typu dynatronu mamy  $\delta r > 0$ , a zatem dla utrzymania dodatniego  $\tau$  musi być  $\lambda < 0$ . W warunkach naturalnych nie spotykamy indukcyjności ujemnej, a więc nie należy spodziewać się, aby elementy obwodu mogły jej dostarczyć. Poniżej okaże się, że rolę tę może spełnić pojemność dołączona równolegle.

Wyrazimy teraz charakterystykę oporu ujemnego równaniem

$$i = -su + scu^3, \quad (23)$$

a równanie dołączonego oporu rzeczywistego o przewodności

$$S = s + \delta s \quad (24)$$

napiszemy jako

$$i_s = (s + \delta s)u. \quad (25)$$

Równanie całego układu przybierze wówczas postać

$$i + i_s = -su + scu^3 + su + u\delta s = 0, \quad (26)$$

czyli

$$u(\delta s + scu^2) = 0. \quad (27)$$

Stąd

$$u' = 0, \quad u'' = \sqrt{-\frac{\delta s}{s\sigma}} = u_1, \quad u''' = -\sqrt{-\frac{\delta s}{s\sigma}} = -u_1. \quad (28)$$

Warunkiem występowania rozwiązań  $u''$  i  $u'''$  jest

$$\frac{\delta s}{s\sigma} < 0, \quad (29)$$

a przeto:

dla charakterystyki typu dynatronu (tj. dla  $\sigma > 0$ )

$$\delta s < 0, \quad \text{czyli} \quad S < s,$$

dla charakterystyki typu łuku (tj. dla  $\sigma < 0$ )

$$\delta s > 0, \quad \text{czyli} \quad S > s.$$

W stanie przejściowym wprowadzimy wielkość  $\delta y$ , która może być związana bądź z oporem ujemnym, bądź z oporem obciążenia. Odpowiednie równanie będzie teraz miało postać

$$u[(\delta s + \delta y) + scu^2] = 0, \quad (30)$$

a jego rozwiązania

$$u' = 0, \quad u'' = \sqrt{-\frac{\delta s + \delta y}{s\sigma}}, \quad u''' = -\sqrt{-\frac{\delta s + \delta y}{s\sigma}}. \quad (31)$$

Dla stanu ustalonego  $\delta y = 0$ , a więc  $\delta y$  musi być funkcją zmian napięcia  $u$  w czasie, czyli

$$\delta y = f\left(\frac{du}{dt}\right). \quad (32)$$

Zakładamy, że wielkość  $\delta y$  wyraża się zależnością

$$\delta y = \frac{\gamma}{u} \frac{du}{dt}. \quad (33)$$

Wówczas równanie (30) przyjmie postać

$$\delta s + s\sigma u^2 + \frac{\gamma}{u} \frac{du}{dt} = 0. \quad (34)$$

Rozwiązanie tego równania doprowadzi do wyrażenia na czas trwania przebiegu przejściowego

$$\tau = -1,15 \frac{\gamma}{\delta s} \lg \frac{2}{\Delta_u}. \quad (35)$$

gdzie  $\Delta_u$  jest różnicą między  $\frac{u}{u_0}$  a zerem, bądź między  $\frac{u}{u_0}$  a jednością. Dla czasu trwania przebiegu między wartościami  $u = 0,0001 u_0$  i  $u = 0,9999 u_0$  otrzymamy

$$\tau = -5 \frac{\gamma}{\delta s}. \quad (36)$$

Tutaj przy dodatnim  $\tau$  i ujemnym  $\delta s$  musi być  $\gamma$  dodatnie. Jest to więc pojemność, która pod wpływem zmiany napięcia przejmuje prąd

$$u \delta y = \gamma \frac{du}{dt}$$

stanowiący różnicę prądów między nieliniowym oporem ujemnym a liniowym oporem dodatnim. Jest to pojemność występująca w każdym układzie rzeczywistym, np. pojemność między przewodami, między za-



ciskami oporów itp. Pojemność taka, w przypadku dynatronu będąca np. rzędu  $1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$ , przy

$$\delta s = S - s = \frac{1}{10\,000 \, \Omega} - \frac{1}{9\,000 \, \Omega} = -\frac{1}{90\,000 \, \Omega}$$

da czas przeskoku

$$\tau = -5 \frac{10^{-12}}{1} = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ sek.}$$

W ten sposób do wyjaśnienia przebiegów w stanie przejściowym, w przypadku współpracy oporu ujemnego nieliniowego typu dynatronu z oporem liniowym dodatnim, nie jest potrzebne zakładanie specjalnej pojemności, związanej z oporem ujemnym; wystarczy uwzględnienie znikomo małej pojemności, występującej w postaci naturalnej w każdym obwodzie elektrycznym spotykanym w rzeczywistości.

### 3. STAN USTALONY PRZEBIEGÓW PERIODYCZNYCH W UKŁADACH „OPÓR UJEMNY TYPU ŁUKU + OBWÓD REZONANSOWY SZEREGOWY“

Rozpatrzmy teraz pracę oporu ujemnego nieliniowego w stanie ustalonym przebiegów zmiennych, a więc pracę generatora utworzonego przez opór ujemny nieliniowy i obwód rezonansowy.

Rozważmy opór ujemny nieliniowy typu łuku o charakterystyce symetrycznej, wyrażającej się równaniem

$$u = -ri + r\alpha i^3, \quad (37)$$

czyli obwód rezonansowy szeregowy LCR, którego impedancja dana jest równaniem

$$Z = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + j \frac{1}{\omega C} \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) = R + jX_1, \quad (38)$$

gdzie

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (39)$$

jest częstotliwością rezonansową obwodu.

Początkowy stan pracy oporu ujemnego wybieramy w punkcie symetrii  $i=0$ ,  $u=0$ . Jeśli oporność rzeczywista obwodu rezonansowego  $R$  spełnia warunek  $R < r$ , a mianowicie

$$R = r + \delta r, \quad (40)$$

gdzie

$$\delta r < 0, \quad (41)$$

to otrzymamy stan pracy generacyjnej o przebiegach periodycznych, prawie sinusoidalnych, lub mniej albo więcej odkształconych (aż do relaksacyjnych), zależnie od stopnia odejścia od stanu granicznego, który jest dany przez warunek  $\delta r = 0$ .

W ten sposób na zaciskach oporu ujemnego oraz na zaciskach obwodu rezonansowego ustali się pewne napięcie, które można będzie wyrazić wzorem

$$U = \sum_{k=1}^{k=\infty} U_k \sin(k\omega t + \psi_k), \quad (42)$$

gdzie

$U_k$  — jest amplitudą napięcia,  
 $\psi_k$  — jego fazą,  
 $\omega$  — częstotliwością podstawową,  
 $k$  zaś — rzędem harmoniczych.

Pod wpływem tego napięcia zarówno przez opór ujemny, jak i przez obwód rezonansowy popłynie prąd zmienny, przy czym w odniesieniu do tego napięcia prąd w oporze będzie miał kierunek przeciwny niż prąd w obwodzie rezonansowym. Ten ostatni może być napisany w postaci wyrażenia

$$i_R = \sum_{k=1}^{k=\infty} I_k \sin(k\omega t + \varphi_k), \quad (43)$$

podczas gdy prąd w oporze ujemnym będzie

$$i = -i_R = - \sum_{k=1}^k I_k \sin(k\omega t + \varphi_k). \quad (44)$$

We wzorach tych  $I_k$  oznacza amplitudę prądu o częstotliwości  $k\omega$ ,  $\varphi_k$  — jego fazę.

Między wielkościami (42) i (43) oraz (42) i (44) muszą istnieć zależności wynikające z impedancji obwodu rezonansowego (38) lub z charakterystyki oporu ujemnego (37).

Rozważania przeprowadzimy dla stanu pracy niezbyt odległego od stanu granicznego<sup>3</sup>, zakładając, iż dobroć obwodu rezonansowego nie jest zbyt mała; przy takich założeniach przebiegi prądów i napięć nie

Zakładając pracę bardzo blisko granicy powstawania drgań nie przechodzimy na charakterystyce nieliniowej oporu ujemnego poza punkt, dla którego  $\frac{du}{di}$  (bądź  $\frac{di}{du}$ ) osiąga wartości nieskończenie wielkie, dzięki czemu można uniknąć wówczas w rozważaniach wątpliwości, jakie nasuwają się przy fizycznej interpretacji zjawisk (np. [3, 5]).



będą odbiegały zbytnio od sinusoidalnych, a częstotliwość generatora będzie się bardzo mało różniła od częstotliwości rezonansowej obwodu.

Ponadto rozważania ograniczymy do harmonicznych rzędu nie przekraczającego 3, a zatem wobec symetrii charakterystyki oporu nieliniowego wystąpią — oprócz podstawowych — jedynie trzecie harmoniczne napięcia i prądu.

### 3. 1. Zależności wynikające z impedancji obwodu rezonansowego

Wprowadzając dobroć obwodu rezonansowego

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (45)$$

impedancję tego obwodu daną równaniem (38) napiszemy dla częstotliwości podstawowej w postaci wyrażenia

$$Z_1 = R \left[ 1 + jQ \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \right]. \quad (46)$$

Przesunięcie fazy między napięciem podstawowym i prądem podstawowym będzie

$$\operatorname{tg} \psi_1 = Q \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right). \quad (47)$$

Dla przebiegów na trzeciej harmonicznej będziemy mieli

$$Z_3 = R \left[ 1 + j \frac{1}{3} Q \left( 9 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \right]. \quad (48)$$

Dla  $Q \gg 1$  oraz  $\omega^2 \approx \omega_0^2$  można wyrażenie (48) napisać jako

$$Z_3 = R \left[ 1 + j \frac{8}{3} Q \right] \approx j \frac{8}{3} QR. \quad (49)$$

Przesunięcie fazy między napięciem a prądem trzeciej harmonicznej wyniesie

$$\operatorname{tg}(\psi_3 - \varphi_3) \approx \frac{8}{3} Q. \quad (50)$$

Dla  $Q \gg 1$  będzie  $\operatorname{tg}(\psi_3 - \varphi_3) \gg 1$ , czyli

$$\psi_3 - \varphi_3 \approx \frac{\pi}{2}. \quad (51)$$

### 3. 2. Zależności wynikające z charakterystyki oporu ujemnego

Zakładamy zatem następujące równania napięcia i prądu na nieliniowym oporze ujemnym

$$u = U_1 \sin(\omega t + \psi_1) + U_3 \sin(3\omega t + \psi_3), \quad (52)$$

$$-i = I_1 \sin \omega t + I_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) \quad (53)$$

i podstawiamy (52) i (53) do równania charakterystyki (37).

Po przekształceniu, odrzuceniu wyrazów o częstotliwościach wyższych od  $3\omega$  oraz po pominięciu wyrazów zawierających prądy  $I_1$  w potęgę większej od drugiej, przyrównujemy amplitudy wyrazów o identycznych częstotliwościach i fazach. Z tego porównania określimy

$$U_1 \cos \psi_1 = r I_1 \left[ 1 - \frac{3}{4} \varrho I_1^2 (1 - n_3 \cos \varphi_3) \right], \quad (54)$$

$$U_1 \sin \psi_1 = r I_1 \left[ \frac{3}{4} \varrho I_1^2 n_3 \sin \varphi_3 \right], \quad (55)$$

$$U_3 \cos \psi_3 = r I_1 \left[ \frac{1}{4} \varrho I_1^2 + \left( 1 - \frac{3}{2} \varrho I_1^2 \right) n_3 \cos \varphi_3 \right], \quad (56)$$

$$U_3 \sin \psi_3 = r I_1 \left[ \left( 1 - \frac{3}{2} \varrho I_1^2 \right) n_3 \sin \varphi_3 \right], \quad (57)$$

gdzie

$$n_3 = \frac{I_3}{I_1} \quad (58)$$

jest zawartością prądową trzeciej harmonicznej.

Dla  $n_3 \ll 1$  oraz dla  $\varrho I_1^2 \ll 1$  co ma miejsce w przypadku pracy blisko stanu granicznego, wyrażenia (54) do (58) można uprościć, wprowadzając ponadto oznaczenie

$$\frac{3}{4} \varrho I_1^2 = \varepsilon \quad (59)$$

napiszemy

$$U_1 \cos \psi_1 \approx r I_1 (1 - \varepsilon), \quad (60)$$

$$U_1 \sin \psi_1 \approx r I_1 \varepsilon n_3 \sin \varphi_3, \quad (61)$$

$$U_3 \cos \psi_3 \approx r I_1 \left( \frac{1}{3} \varepsilon + n_3 \cos \varphi_3 \right), \quad (62)$$

$$U_3 \sin \psi_3 \approx r I_1 n_3 (1 - 2\varepsilon) \sin \varphi_3. \quad (63)$$



Z wyrażeń (60) i (61) wynika, że ujemny opór nieliniowy w odniesieniu do przebiegów podstawowych napięcia i prądu może być przedstawiony jako impedancja zespolona.

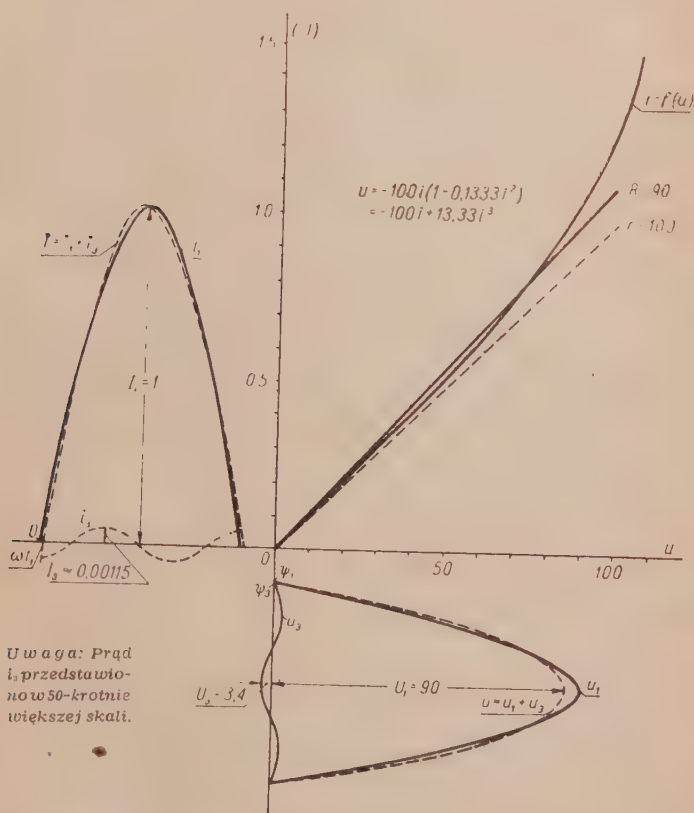
$$Z_{e1} \approx -r(1-\varepsilon) - j r \varepsilon n_3 \sin \varphi_3 = R_{e1} + j X_{e1}, \quad (64)$$

której składowa rzeczywista (rezystancja) jest

$$R_{e1} = -r(1-\varepsilon), \quad (65)$$

a składowa urojona (reaktancja)

$$X_{e1} = -r \varepsilon n_3 \sin \varphi_3. \quad (66)$$



Rys. 4. Krzywe chwilowych przebiegów napięć i prądów na oporze nieliniowym

W stanie granicznym pracy jest  $\varepsilon = 0$  i  $n_3 = 0$ ; wówczas reaktancja  $X_{e1}$  jest równa zero, a impedancja staje się rzeczywista.

Gdy stan pracy przechodzi poza granicę powstawania drgań, zjawia się reaktancja  $X_{\varphi_1}$ , której wartość wzrasta w miarę odchodzenia od granicy (wzrost  $\varepsilon$  i  $n_3$ ). Znak reaktancji zależy od znaku  $\sin \varphi_3$ , to jest od rodzaju reaktancji obwodu rezonansowego dla trzeciej harmonicznej.

Z równań (65) i (66) znajdujemy przesunięcie fazy między napięciem a prądem (podstawowymi):

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} n_3 \sin \varphi_3. \quad (67)$$

Dla  $\varepsilon \ll 1$  jest

$$\operatorname{tg} \psi_1 \approx \psi_1 \approx 0, \quad (68)$$

a przebiegi niewiele odbiegają od sinusoidalnych; zatem  $n_3 \gg 1$  oraz zawartość harmonicznej napięciowej

$$m_3 = \frac{U_3}{U_1} \quad (69)$$

również jest mała wobec jedności ( $m_3 \ll 1$ ).

W przypadku charakterystyki typu łuku oraz obwodu rezonansowego szeregowego o dużej dobroci krzywa prądu będzie znikomo mało odbiegała od sinusoidy, wobec czego krzywa napięcia musi być prawie symetryczna względem swych wartości maksymalnych oraz będzie spłaszczona w miejscu tych wartości (rys. 4). Zatem trzecia harmoniczna napięcia musi być prawie w fazie<sup>1</sup> z podstawową napięcia, a przeto kąt  $\psi_3$  może się niewiele różnić od kąta  $\psi_1$ , czyli

$$\psi_3 \approx \psi_1 \approx 0. \quad (70)$$

Uwzględniając (70) w (51) otrzymamy

$$\varphi_3 = -\frac{\pi}{2}. \quad (71)$$

W ten sposób w wielu poprzednich wzorach będziemy mogli przyjąć

$$\sin \varphi_3 \approx -1, \quad (72)$$

$$\cos \varphi_3 \approx 0 \quad (73)$$

<sup>1</sup> Przyjmujemy tu, że przebieg harmoniczny ma fazę zgodną z przebiegiem podstawowym, jeśli dla momentu początkowego (punkt  $t = 0$ ) wartości ich są równe zeru, nachylenia zaś stycznych w tym punkcie mają jednakowe znaki.



i uprościć je do następującej postaci:

$$U_1 \sin \psi_1 \approx -rI_1 \varepsilon n_3, \quad (74)$$

$$U_3 \cos \psi_3 \approx rI_1 \frac{1}{3} \varepsilon, \quad (75)$$

$$U_3 \sin \psi_3 \approx -rI_1 (1 - 2\varepsilon) n_3, \quad (76)$$

$$X_{\varrho_1} \approx r\varepsilon n_3, \quad (77)$$

$$\operatorname{tg} \psi_1 \approx -\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} n_3. \quad (78)$$

W celu określenia zawartości harmonicznej prądowej  $n_3$  za pomocą danych obwodu i stopnia odejścia od granicy znajdujemy najpierw zawartość harmonicznej napięciowej  $m_3$ .

Dla stanu bliskiego do granicznego będzie zgodnie ze wzorem (60)

$$U_1 \approx U_1 \cos \psi_1 \approx rI_1 (1 - \varepsilon). \quad (79)$$

Z równań (62) i (63) znajdziemy

$$U_3 = \sqrt{(U_3 \cos \psi_3)^2 + (U_3 \sin \psi_3)^2} = rI_1 \sqrt{\left(\frac{1}{3} \varepsilon\right)^2 + n_3^2 (1 - 2\varepsilon)^2}. \quad (80)$$

Podstawiając (79) i (80) do (69) otrzymamy

$$m_3 = \frac{1}{1 - \varepsilon} \sqrt{\left(\frac{1}{3} \varepsilon\right)^2 + n_3^2 (1 - 2\varepsilon)^2}. \quad (81)$$

Między  $m_3$  a  $n_3$  można ustalić następującą zależność:

$$m_3 = \frac{U_3}{U_1} = \frac{I_3 Z_3}{I_1 Z_1} = n_3 \frac{\sqrt{R^2 + \left(\frac{8}{3} QR\right)^2}}{R} = n_3 \sqrt{1 + \left(\frac{8}{3} Q\right)^2}. \quad (82)$$

Z porównania wyrażeń (81) i (82) otrzymamy

$$n_3 = \frac{1}{8Q} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(2 - 3\varepsilon)\varepsilon}{\left(\frac{8}{3} Q\right)^2 (1 - \varepsilon)^2}}}. \quad (83)$$

Dla  $\varepsilon \ll 1$  oraz  $Q \gg 1$  możemy ułamek pod pierwiastkiem pominąć wobec jedności i napisać

$$n_3 = \frac{1}{8Q} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (84)$$

W ten sposób wyraziliśmy zawartość harmonicznej prądowej za pomocą stopnia odejścia od stanu granicznego ( $\varepsilon$ ) oraz za pomocą dobroci obwodu rezonansowego ( $Q$ ).

Podstawiając (84) do wyrażenia na reaktancję (77) otrzymujemy

$$X_{e_1} = \frac{1}{8Q} r \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon}. \quad (85)$$

Stopień odejścia od granicy  $\varepsilon$  można powiązać z wartością oporności rzeczywistej obwodu rezonansowego  $R$  przyrównując do zera sumę oporności rzeczywistych obwodu rezonansowego oraz oporu ujemnego dla częstotliwości podstawowej:

$$R + R_e = 0. \quad (86)$$

Podstawiając tu za  $R_{e_1}$  wyrażenie (65) otrzymamy

$$R + r(1-\varepsilon) = 0, \quad (87)$$

skąd

$$1-\varepsilon = \frac{R}{r} \quad (88)$$

craz

$$\varepsilon = 1 - \frac{R}{r}. \quad (89)$$

Wyrażenie na reaktancję oporu ujemnego napiszemy jako

$$X_{e_1} = \frac{1}{8Q} \frac{(r-R)^2}{R} \quad (90)$$

albo po uwzględnieniu (52)

$$X_{e_1} = \frac{1}{8} \int \frac{C}{L} (r-R)^2. \quad (91)$$

Przy częstotliwości

$$\omega \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

równoważna indukcyjność wyniesie

$$L_{e_1} = \frac{X_{e_1}}{\omega} = \frac{1}{8} C (r-R)^2 = \frac{1}{8} C (\delta r)^2, \quad (92)$$



jeśli zgodnie z (40) różnicę między opornością oporu ujemnego dla stanu granicznego  $r$  a opornością obwodu rezonansowego  $R$  oznaczmy przez

$$\delta r = R - r. \quad (93)$$

Wyrażenie (92) jest tzw. indukcyjnością własną oporu ujemnego typu łuku. Jak widać, jest ona zależna od pojemności ( $C$ ) obwodu rezonansowego szeregowego oraz od stopnia odejścia od stanu granicznego ( $\delta r$ ), a więc nie jest cechą oporu ujemnego lecz jest tylko pewnego rodzaju „odkiciem“ w oporze ujemnym nieliniowym parametrów zewnętrznego obwodu rezonansowego, który wskutek zjawienia się harmoniczných wywołanych nieliniowością charakterystyki jest przyczyną powstawania przesunięcia faz między napięciem i prądem o częstotliwości podstawowej.

### 3. 3. Zgodność z teorią nieliniową generacji

Zgodnie z teorią liniową generacji suma reaktancji w obwodzie generatora dla częstotliwości podstawowej musi być równa zeru. Zatem określając z równania (38) reaktancję obwodu rezonansowego

$$X_1 = RQ \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) \quad (94)$$

napiszemy

$$X_1 + X_{e1} = 0, \quad (95)$$

a po podstawieniu tu wyrażenia (77) otrzymamy

$$RQ \left( \frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 \right) + r\epsilon n_3 = 0, \quad (96)$$

skąd

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = -\frac{1}{Q} \frac{r}{R} \epsilon n_3. \quad (97)$$

Ponieważ z równania (89) jest

$$\frac{R}{r} = 1 - \epsilon, \quad (98)$$

przeto

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = -\frac{1}{Q} \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} n_3. \quad (99)$$

Uwzględniając tu wzór (84) napiszemy równanie (99) jako

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = -8n_3^2. \quad (100)$$

To samo wyrażenie można otrzymać wychodząc z rozważań nieliniowej teorii generacji. Mianowicie jeśli obwód rezonansowy jest obwodem oscylacyjnym, pobudzonym przez nieliniowy opór ujemny, wtedy częstotliwość generatora  $\omega$  różni się od częstotliwości rezonansowej  $\omega_0$  obwodu rezonansowego. Odchylenie częstotliwości, zgodnie z teorią równowagi mocy urojonych ([7] ÷ [9]) dane tu jest dla obwodu rezonansowego szeregowego przez wyrażenie

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = - \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1) n_k^2.$$

Dla  $k=3$ ,  $n_k=n_3$  otrzymamy wyrażenie (100).

#### 4. STAN USTALONY PRZEBIEGÓW W UKŁADACH „OPÓR UJEMNY TYPU DYNATRONU + OBWÓD REZONANSOWY RÓWNOLEGŁY“

W sposób analogiczny jak w rozdz. 3 można — dla układu generacyjnego, składającego się z oporu ujemnego typu dynatronu o równaniu

$$i = -su + scu^3 \quad (101)$$

oraz z obwodu rezonansowego równoległego LCS o dobroci

$$Q = \frac{1}{S} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (102)$$

pracującego poza granicą powstawania drgań określoną przez przewodność

$$S = s + \delta s, \quad (103)$$

gdzie

$$\delta s < 0 \quad (104)$$

— otrzymać wyrażenie na susceptancję oporu ujemnego dla częstotliwości podstawowej

$$Y_{\sigma_1} = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{L}{C}} (s - S)^2; \quad (105)$$

z wyrażenia tego przy częstotliwości  $\omega = \omega_0$  otrzymamy równoważną pojemność

$$C_{\sigma_1} = \frac{Y_{\sigma_1}}{\omega} = \frac{1}{8} L (s - S)^2 = \frac{1}{8} L (\delta s)^2. \quad (106)$$

Wyrażenie to jest tzw. pojemnością własną oporu ujemnego typu dynatronu. Jak widać, jest ona zależna od indukcyjności ( $L$ ) obwodu rezonansowego równoległego oraz od stopnia odejścia od stanu granicznego ( $\partial s$ ), a więc nie jest cechą oporu ujemnego, lecz jest tylko pewnego rodzaju „odbiciem” w oporze ujemnym nieliniowym parametrów zewnętrznego obwodu rezonansowego, który jest przyczyną powstawania przesunięcia faz między prądem a napięciem o częstotliwości podstawowej. Wyrażenie (100) może być otrzymane bezpośrednio z wyników nieliniowej teorii generacji w sposób podobny, jak to omówiono w rozdz. 3, dla obwodu szeregowego, wychodząc z zawartości trzeciej harmonicznej napięciowej

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = - \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - 1) m_k^2 = - 8 m_3^2. \quad (107)$$

### 5. PRZYKŁAD

Założmy, iż współczynniki w równaniu oporu ujemnego nieliniowego typu łuku (37) są

$$r = 100, \quad \rho = 0,1333,$$

a obwód rezonansowy szeregowy ma dobroć (45)

$$Q = 12.$$

Stan pracy jest bliski stanu granicznego i jest dany przez

$$\varepsilon = 0,1.$$

Z równania (88) znajdujemy oporność rzeczywistą obwodu rezonansowego

$$R = 90,$$

a z równania (59) — amplitudę składowej podstawowej prądu

$$I_1 = 1.$$

Amplitudę składowej podstawowej napięcia znajdujemy z (79) jako

$$U_1 = 90.$$

Zawartość trzeciej harmonicznej prądowej (83) i (84) będzie

$$n_3 = 0,00115 \frac{1}{1 - 0,21 \cdot 10^{-3}} \approx 0,00115 (1 - 10^{-3}) \approx 0,00115.$$



Zatem amplituda trzeciej harmonicznej prądu (58)

$$I_3 \approx 0.00115.$$

Zawartość trzeciej harmonicznej napięcia (82)

$$m_3 = 0.00115 \sqrt{1 + 32^2} \approx 0.00115 \cdot 32 (1 + 0.5 \cdot 10^{-3}) \approx 0.038.$$

Zatem amplituda trzeciej harmonicznej napięcia (69)

$$U_3 \approx 3.4.$$

Przesunięcie fazy między napięciem podstawowym a prądem podstawowym (78)

$$\operatorname{tg} \psi_1 = -0.000128, \quad \psi_1 \approx 0^{\circ}0'26''.$$

Przesunięcie fazy między napięciem trzeciej harmonicznej a prądem trzeciej harmonicznej

$$\operatorname{tg} \psi_3 \approx -0.028, \quad \psi_3 \approx -1^{\circ}38'.$$

Ze wzoru (57) znajdujemy

$$\operatorname{tg} (\psi_3 - \varphi_3) = 32, \quad \psi_3 - \varphi_3 \approx 88^{\circ}12'.$$

Stąd

$$-\varphi_3 \approx 88^{\circ}12' + 1^{\circ}38' \approx 89^{\circ}50'.$$

Zatem

$$\sin \varphi_3 \approx -1.$$

Moment czasu  $t_1$ , w którym prąd  $i$  i napięcie  $u$  przechodzą przez zero, znajdujemy z (53) czyniąc  $i = 0$ . Dla  $i = 0$  oraz  $\varphi_3 = -\frac{\pi}{2}$  równanie to daje

$$\omega t_1 \approx 0.0011.$$

Odpowiadające temu momentowi chwilowe wartości napięć i prądów są odpowiednio

$$u_1 \approx 0.09, \quad u_3 \approx -0.09,$$

$$i_1 \approx 0.0011, \quad i_3 \approx -0.0011.$$

Reaktancja oporu ujemnego nieliniowego dla częstotliwości podstawowej (85) lub (77)

$$X_{\omega_1} = 0.00115.$$

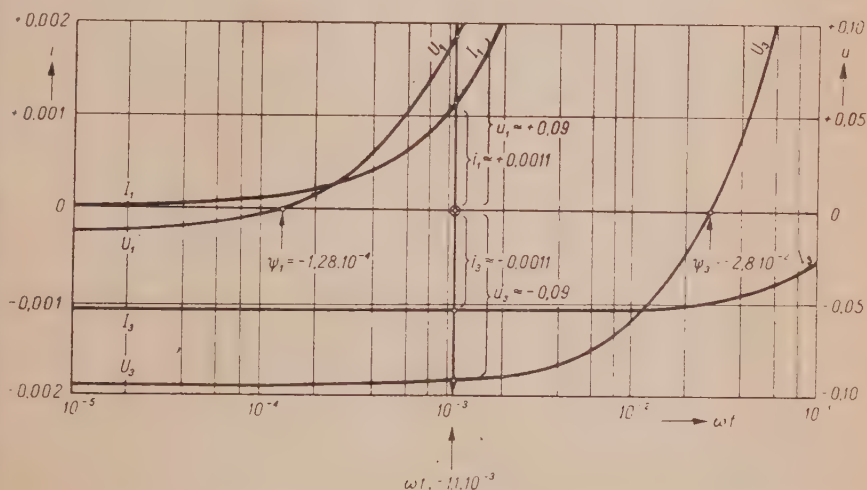
Na podstawie nieliniowej teorii harmonicznego odchylenie częstotliwości od częstotliwości stanu granicznego zgodnie ze wzorem (100) wyniesie

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = -10.6 \cdot 10^{-5}.$$

Przy  $R = 90$  i  $Q = 12$  da to reaktancję obwodu rezonansowego zgodnie ze wzorem (38)

$$X_1 = -0,115;$$

jest ona równa reaktancji  $X_{e1}$  ze znakiem przeciwnym.



Rys. 5. Krzywe chwilowych przebiegów napięć i prądów na oporze nieliniowym przedstawione w skali logarytmicznej  $\omega t$

Jeśli przyjmiemy, że założone w przykładzie oporności wyrażone są w omach, otrzymamy przy częstotliwości np.  $f = 1000$  c/s ( $\omega = 2\pi \cdot 10^3$ ) równoważną indukcyjność oporu ujemnego nieliniowego dla danego stanu pracy

$$L_{e1} = \frac{X_{e1}}{2\pi \cdot 10^3} = 3,7 \cdot 10^{-5} \text{ H} = 37 \mu\text{H}.$$

Kształt przyjętej w przykładzie charakterystyki, położenie prostych cporów  $R$  i  $r$  oraz przebiegi chwilowe napięć i prądów podstawowych i trzecich harmonicznch przedstawiono na rys. 4.

Na rys. 5 pokazano w skali logarytmicznej kąta  $\omega t$  przebieg tych samych krzywych w szczególnie interesującym obszarze bardzo małych wartości  $\omega t$ , gdzie dla  $\omega t_1$  zachodzi równoczesne przechodzenie przez zero wypadkowej krzywej prądu  $i = i_1 + i_3$ , oraz napięcia  $u = u_1 + u_3$ . Kąty  $\omega t_1$  i  $\omega t_2$  są wyznaczone przez miejsca przejścia przez zero krzywych  $u_1$  i  $u_3$ .

Praca referowana na posiedzeniu naukowym  
Wydziału IV PAN w dniu 16 marca 1953 roku  
Zakład Radiotechniki  
Politechniki Warszawskiej

## WYKAZ LITERATURY

- [1] Barkhausen H. — Warum kehren sich die für den Lichtbogen gültigen Stabilitätsbedingungen bei Elektronenröhren um? — Phys. Z. 27, 1926 str. 43.
- [2] Barkhausen H. — Jahrb. d. d. T. t. 27, z. 5, 1926, str. 150. Elektronenröhren. B. 3 (wydanie 6), Leipzig, 1951, str. 72.
- [3] Sarrasin G. — La correspondance entre les caractéristiques statiques et les paramètres dynamiques des organes électriques à résistance négative — Onde Electr. t. 29, 1949, str. 44.
- [4] Diemer : Jonker — On the time delay of secondary emission, str. 360. — Phil. Res. Rep. t. 5, z. 3, 1950.
- [5] Drobow S. A. — Pieriedajuszczyje ustrojstwa, Moskwa, 1951.
- [6] Friedländer E. — Über Stabilitätsbedingungen und ihre Abhängigkeit von Steuerorganen und Energiespeichern — Phys. Z. t. 27, 1926, str. 361.
- [7] Groszkowski J. — Zmiany częstotliwości a zawartość harmoniczných w układach oscylacyjnych — Przegl. Radiot. t. 10, z. 23/24, 1932 oraz t. 11, z. 12, 1933.
- [8] Groszkowski J. — The dynatron oscillator — Wireless Eng. t. 9, nr 107, 1932.
- [9] Groszkowski J. — The interdependence of the frequency variation and harmonic content — Proc. I.R.E. t. 21, nr 7, 1933, str. 958.
- [10] Groszkowski J. — Wpływ oporu nieliniowego rzeczywistego na oporność urojoną obwodu — Kwart. Telekom. t. 9, nr 2/4, 1946.
- [11] Groszkowski J. — Lampa jarzeniowa jako indukcyjność — Kwart. Telekom. t. 11, nr 3/4, 1948.
- [12] Heegner A. — Schwungradschaltung und Serienschaltung bei selbsterregten durch Elektronenröhren erzeugten Schwingungen — Z Hochfr. t. 40, 1932, str. 198.
- [13] Reichardt W. — Entartung sinusformiger Schwingungen — ENT t. 8, z. 8, 1931, str. 344.
- [14] Reichardt W. — Entartungserscheinungen am Röhrensender ENT t. 8, z. 11, 1931, str. 502.
- [15] Reichardt W. — Der einheitliche Zusammenhang zwischen Sinusschwingungen und Kippsprüngen — ENT t. 20, z. 9, 1943.
- [16] Reichardt W. — Negative Widerstände, ihre Eigenschaften und Wirkungen. ENT t. 20, z. 3, 1943.
- [17] Rothe : Kleen — Elektronenröhren als Schwingungserzeuger und Gleichrichter, Leipzig 1941 (wyd. I) oraz 1948 (wyd. II).
- [18] Steimel K. — Die Stabilität und Selbsterregung elektrischer Kreise mit Organen fallender Charakteristik, — J. d.d.T. t. 36, 1930, str. 161.



Я. ГРОШКОВСКИ

## ОБ „ИНДУКТИВНОСТИ“ ДУГИ И „ЁМКОСТИ“ ДИНАТРОНА

## Резюме

В многочисленных трудах об устойчивости систем дуги и динатрона с отрицательными нелинейными сопротивлениями некоторые авторы предполагают существование последовательной индуктивности в дуге и параллельной ёмкости в динатроне. Величины играющие существенную роль в устойчивости систем с отрицательными сопротивлениями — как для постоянного тока, так и для колебательных процессов. При помощи этих величин выражаются приписываемые отрицательным сопротивлением запаздывания, наступающие между причиной и следствием: в сопротивлениях типа дуги причиной является ток, следствием же напряжение, в сопротивлениях типа динатрона — наоборот.

Автор пытается доказать, что хотя дуга может представлять некоторые индукционные свойства, динатрон же ёмкостные свойства, однако свойства эти не являются необходимыми для теоретического обоснования ряда зависимостей связанных с состоянием соответственных систем.

Существенной разницей неодинакового состояния сопротивлений дуги и динатрона, касающихся нестационарных переходных процессов, являются разные направления кривой их характеристики и только отсюда вытекают теоретические и опытные результаты состояния сопротивлений обоих типов.

Что касается элементов накапливающих энергию, наличие которых в связи с нелинейностью характеристики — оказывается необходимым для рассмотрения переходных состояний постоянного тока при переброске точки работы, то наличие такого элемента (индуктивности или ёмкости) не обязательно должно быть связано с отрицательным нелинейным сопротивлением. Для обоснования происходящих здесь явлений достаточно учесть те индуктивности или ёмкости, которые всегда появляются в действительных системах (нпр. в присоединениях и т. п.).

В случае совместной работы нелинейных отрицательных сопротивлений с резонансными контурами в стационарном или почти стационарном состоянии — нелинейность вызывает возникновение гармонических процессов, которые в свою очередь вызывают отклонение частоты генератора от резонансной частоты контура; в результате на отрицательном сопротивлении возникает сдвиг фазы между основным напряжением и основным током.

Рассмотрение вопроса путем линейной теории не учитывало присутствия гармонических процессов, и поэтому было необходимо ввести в отрицательное сопротивление элемент с соответственным реактансом, а именно в сопротивление типа дуги — индуктивность, а в сопротивление типа динатрона — ёмкость. При учете роли гармонических процессов по теории автора о равновесии реактивной мощности в нелинейных генераторах [9], введение в отрицательные сопротивления добавочных реактансов — оказывается излишним, излишне также и проведение отличия причины и следствия в явлениях происходящих в этих сопротивлениях.

Исследования были проведены на отрицательных нелинейных сопротивлениях с характеристиками  $u = -ri + ri^3$  или  $i = -su + su^3$ .

В части труда, относящейся к рассмотрению переходных состояний в системах „отрицательное нелинейное сопротивление — положительное линейное сопротивление“ выведено выражение на время продолжительности переброса тока (или напряжения) от нуля до величины стационарного состояния (форм. 21) или (35); доказано.

что индуктивность провода, нпр.  $4 \cdot 10^{-7}$  генра даёт продолжительность переброса тока  $2 \cdot 10^{-7}$  сек: ёмкость же разряда, нпр. 1 пикофарада даёт время скачка напряжения около  $5 \cdot 10^{-8}$  сек.

В части труда относящейся к стационарным процессам систем: „отрицательное нелинейное сопротивление и резонансный контур“ доказано на основании анализа процессов искажения напряжения и тока на нелинейной характеристике, что нпр. в случае сопротивления дуги и последовательного резонансного контура — на дуге наблюдается сдвиг фазы между основными величинами напряжения и тока; этот сдвиг можно искусственно выразить при помощи индуктивности (форм. 92)

$$L_{\theta_1} = \frac{1}{8} C(r - R)^2,$$

где

$C$  — ёмкость последовательного резонансного контура.

$R$  — его сопротивление,

$r$  — отрицательное сопротивление дуги для режима близкого к предельному.

Для динатрона и параллельного контура получаем (форм. 106)

$$C_{\sigma} = \frac{1}{8} L(s - S)^2,$$

где

$L$  — индуктивность параллельного резонансного контура,

$S$  — его проводимость,

$s$  — отрицательная проводимость динатрона для режима близкого к предельному.

Однако как индуктивность  $L_{\theta_1}$  для дуги, так и ёмкость  $C_{\sigma}$  для динатрона не являются собственными свойствами отрицательных сопротивлений, но некоторого рода „отражением“ в отрицательном сопротивлении параметров внешнего резонансного контура, который под влиянием гармонических процессов вызывает сдвиг фаз между направлением и током основной частоты.

Сам факт появления гармонических процессов вызван нелинейностью характеристики отрицательного сопротивления, а направление сдвига фаз зависит от рода резонансного контура (последовательный или параллельный контур).

J. GROSZKOWSKI

## THE „INDUCTANCE“ OF THE ARC AND THE „CAPACITANCE“ OF THE DYNATRON

### Summary

Some authors assume in their works about the stability of the systems with the nonlinear negative resistances of the arc and dynatron type, the existence in the arc of a series inductance and in the dynatron of a parallel capacitance.

They consider these quantities to be essential for the stability of the systems employing negative resistances, both in the case of direct and oscillating currents. By means of these quantities they express the time delay, which occurs between „the cause“ and „the effect“: this time delay they ascribe to the above negative resistances. In the case of the arc „the cause“ is the current and „the effect“ — the voltage; the reverse is claimed to be true for the dynatron.

This paper has to prove, that although the arc displays some features of an inductance and the dynatron — of a capacitance, these features are not indispensable for the theoretical explanation of the behaviour of these systems.

The most essential reason for such a different behaviour of the arc and dynatron resistances — when considering the transient phenomena — is the opposite curvature of their characteristic. This fact explains the theoretical and experimental difference in the behaviour of these two types of resistance.

The energy-storing elements (inductance or capacitance) which must be taken into account when one examines the D.C. transient phenomena during the sudden jumps of the operating point along a nonlinear characteristic, must not necessarily be linked with the nonlinear negative resistance itself.

The inclusion into calculations of the stray inductances or capacitances of connecting wires existing in every real circuit gives a complete explanation of the occurring phenomena.

In the steady conditions, the nonlinearity, in the case of the nonlinear negative resistances connected with the resonant circuit, leads to the generation of harmonics. This, in consequence, causes a deviation of the frequency of the system from the resonance frequency with a resulting phase shift between the voltage and current at the fundamental frequency. The linear theory of oscillations generation disregards the harmonics and postulates the introduction of a suitable reactive element, i. e. an inductance for the arc and capacitance for the dynatron. The above postulate and the discrimination between the cause and the effect can be dispensed with, when considering the phenomena occurring in the circuits with these negative resistances, if the influence of the harmonics has been taken into account according to the author's theory of the reactive power balance in the nonlinear oscillators [9].

The nonlinear negative resistances with characteristics

$$u = -ri + r\phi i^3 \quad \text{or} \quad i = -su + sou^3$$

were considered in this paper.

In the part of the paper, which deals with the transient states in the systems consisting of nonlinear negative resistance and linear (positive) resistance, an expression has been formulated for the time of the current (or voltage) „jump“ from zero to a steady state value (formula 21 or 35). This shows that the inductance of connections, e. g.  $3,6 \cdot 10^{-8}$  H, gives the time of the current jump of the order of  $1,8 \cdot 10^{-7}$  sec. Similarly the capacitance of about 1 pF results in a time of voltage jump of the order of  $4,5 \cdot 10^{-7}$  sec.

These figures sufficiently explain the transient phenomena without an assumption of the existence of reactances (lag or lead) in the negative resistances themselves. In the part of the work, which considers the steady state conditions in the systems consisting of the nonlinear negative resistance and the resonant circuit, it has been shown by means of the analysis of the voltage and current distorted waveforms, as produced by the nonlinear characteristic, that a phase shift occurs — at the fundamental frequency between the current and voltage waves across the arc.

This phase-shift can be expressed — in case of the arc and a series resonant circuit — by an equivalent inductance (formula 92)

$$L_{\phi_1} = \frac{1}{8} C (r - R)^2$$



where

$C$  — capacitance of the series resonant circuit,

$R$  — resistance of that circuit,

$r$  — negative resistance of the arc at the threshold of regeneration.

Similarly for the dynatron and a parallel resonance circuit one gets (formula 106)

$$C_g = \frac{1}{8} L (s - S)^2$$

where

$L$  — inductance of the parallel resonant circuit,

$S$  — conductance of resonant circuit,

$s$  — the negative conductance of the dynatron at the threshold of the regeneration.

The inductance  $L_g$  in the case of the arc circuit and the capacitance  $C_g$  in the case of the dynatron are, however, not the proper qualities of these negative resistances, but only „reflect“ in the negative resistance the parameters of the external resonant circuit, which under the influence of harmonics produces a phase-shift between the voltage and current waves of the fundamental frequency.

621.396.645.2:621.396.662.3.72

A. SMOLIŃSKI

## Niektóre zastosowania teorii filtrów elektrycznych do wzmacniaczy szerokopasmowych dolnoprzepustowych

*Rękopis dostarczono 28. 5. 1953.*

**Streszczenie.** Szerokopasmowe wzmacniacze dolnoprzepustowe, stosowane w telewizji i w technice pomiarowej, buduje się na bazie wzmacniaczy oporowych, kompensując pojemność szkodliwą układu za pomocą oporu pozornego, zawierającego opór obciążenia  $R_n$ . Kompensujący opór pozorny dobiera się w ten sposób, aby wypadkowe obciążenie lampy było rzeczywiste, co narzuca specjalny przebieg oporu pozornego. Żądany przebieg oporu pozornego najłatwiej jest wytworzyć budując na pojemności szkodliwej filtr dolnoprzepustowy, którego obciążeniem jest opór rzeczywisty  $R_n$ . W rezultacie otrzymuje się dwukrotny układ kompensujący. Podany sposób pozwala na dwukrotne rozszerzenie pasma w porównaniu ze wzmacniaczem oporowym w granicznym przypadku idealnego dopasowania.

Podział pojemności szkodliwej na wyjściową lampy wzbudzającej i wejściową lampy wzbudzonej i budowa ogniwa podstawowego filtra na tych pojemnościach łącznie z wprowadzeniem obciążenia również w postaci wyżej opisanego filtra pozwala na dalsze dwukrotne rozszerzenie pasma częstotliwości. W rezultacie otrzymuje się czwórnikowy układ kompensujący.

Teoria filtrów pozwala na obliczenie elementów układów kompensujących oraz na obliczenie charakterystyk układów wzmacniających. Ponieważ w praktyce stosuje się niewielkie liczby elementów kompensujących, więc nie osiąga się granicznych wartości szerokości pasma. Wskutek braku dopasowania charakterystyki wzmocnienia przestają być równomierne.

Celem otrzymania możliwie równomiernych charakterystyk wzmocnienia stosuje się metodę szeregu potęgowego, która pozwala na wyznaczenie elementów układów kompensacyjnych przy możliwie płaskich charakterystykach wzmocnienia.

### 1. WSTĘP

Opracowana przez radiotechnikę teoria układów lampowych, oparta na podstawowych prawach elektrotechniki i własnościach lampy, omawia w sposób najprostszy pracę lampy w najróżniejszych typach układach wzmacniających, generacyjnych, modulacyjnych, detekcyjnych itp.

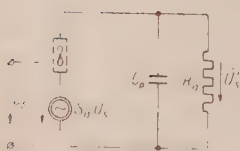
Teoria ta jest w pewnych przypadkach, odnoszących się zwłaszcza do bardziej skomplikowanych układów wzmacniających, narzędziem zbyt prostym, o niewielkiej stosunkowo skuteczności.

W tych przypadkach dostarcza narzędzia lepszego, bardziej skutecznego, teoria czwórników elektrycznych i wynikająca z niej teoria filtrów elektrycznych. Teorie te, zrodzone na gruncie teorii linii elektrycznie długiej, pozwalają na systematyczne ujęcia zagadnienia schematowego, tworzą jego perspektywę i wyznaczają jego graniczne możliwości. Ze względu na stosunkowo skomplikowany aparat matematyczny tych teorii zastosowanie ich ogranicza się do ogólnej analizy zagadnienia, do wyznaczenia racjonalnej struktury układów wzmacniających i ich granicznych możliwości i na koniec do obliczania bardziej skomplikowanych układów.

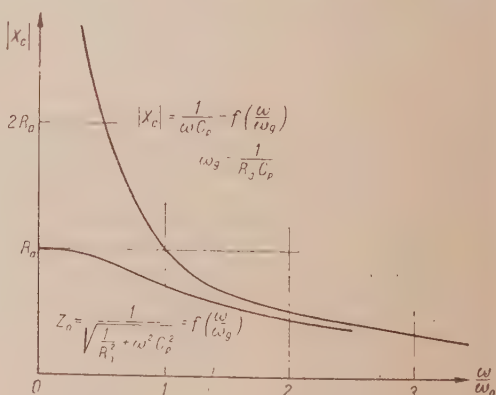
Na tym miejscu zajmiemy się zastosowaniem teorii czwórników i filtrów elektrycznych do klasycznych typów wzmacniaczy szerokopasmowych dolnoprzepustowych (głównie stosowanych w telewizji i urządzeniach pomiarowych).

## 2. POJEMNOŚCI SZKODLIWE UKŁADÓW LAMPOWYCH I ICH NEUTRALIZACJA

We wzmacniaczach szerokopasmowych stosuje się z zasady pentody; ich schemat zastępczy już przy większych częstotliwościach akustycz-



Rys. 1. Uproszczona postać równoległego układu zastępczego w zakresie większych częstotliwości



Rys. 2. Opór obciążenia lampy w funkcji częstotliwości

nych bierze pod uwagę nie tylko SEM-ne i opory rzeczywiste, lecz również i pojemności szkodliwe (rys. 1). Równoległe połączenie tych ele-



mentów ( $R_a$ ,  $C_p$ ) stanowi opór obciążenia lampy malejący w miarę wzrostu częstotliwości. Ponieważ prąd dostarczany przez źródło posiada stałą wartość, więc spadek napięcia na oporze obciążenia maleje również w miarę wzrostu częstotliwości (rys. 2).

Tak samo maleje w funkcji częstotliwości wzmocnienie napięciowe

$$\hat{k}_u = \frac{\hat{U}_s''}{\hat{U}_s'} = k_u e^{j\alpha} = k_u e^{j(-\pi + \Theta)} \quad (1)$$

wzmacniacza oporowego

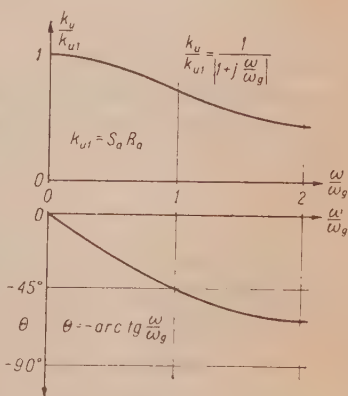
$$\hat{k}_u = -S_a \hat{Z}_0 = -S_a R_a \cos \Theta e^{j\Theta}, \quad (2)$$

gdzie znak ujemny wyraża odwrócenie fazy wywołane przez lampę (rys. 3). Wzmocnienie to spada do 70% wartości maksymalnej przy częstotliwości granicznej wzmacniacza oporowego

$$\omega_g = \frac{1}{R_a C_p}. \quad (3)$$

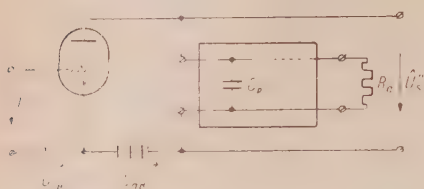
Celem osiągnięcia możliwie równej charakterystyki wzmocnienia  $\frac{k_u}{k_{u1}}$  oraz możliwie stałego wzrostu jego względnego kąta fazowego  $\Theta$  w funkcji częstotliwości — własności wymaganych do nieznieskształconego wzmacniania przebiegów elektrycznych — należy zneutralizować wpływ pojemności szkodliwej  $C_p$  w interesującym nas zakresie częstotliwości. Dokonać tego można w sposób najbardziej elegancki za pomocą tworzenia na pojemności szkodliwej układu, który by posiadał w pewnym zakresie częstotliwości stałą wartość oporu. Wydatną pomocą będzie tu służyć teoria czwórników elektrycznych i związana z nią teoria filtrów.

Przy tworzeniu na pojemności szkodliwej  $C_p$  układu o stałej wartości oporu należy zwrócić uwagę na to, że układ ten powinien między innymi elementami zawierać opór rzeczywisty  $R_a$ , przez który płynie składowa stała prądu anodowego. Opór ten — jako element rzeczywisty układu — może być włączony w dowolny sposób, byleby przez niego płynęła składowa stała prądu anodowego, natomiast pojemność szkodliwa  $C_p$  jako

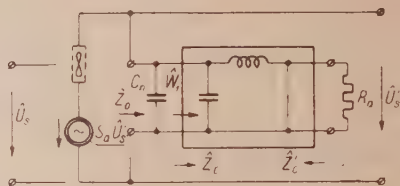


Rys. 3. Charakterystyki wzmocnienia i jego względnego kąta fazowego wzmacniacza oporowego w funkcji częstotliwości

zbiór pojemnościowych własności układu — powinna być włączona między anodę i katodę. To stwierdzenie pozwala na włączenie w obwód anodowy lampy czwórnika elektrycznego, którego gałęzią poprzeczną na wejściu jest pojemność i przez który płynie składowa stała prądu anodo-



Rys. 4. Czwórnik elektryczny w obwodzie anodowym



Rys. 5. Schemat zastępczy lampy z czwórnikiem w obwodzie anodowym

wego (rys. 4). Zadaniem naszym będzie dobranie takiego czwornika, którego opór wejściowy  $Z_i$  będzie stały w pewnym zakresie częstotliwości [1]. Wówczas w tym zakresie częstotliwości uzyskamy na podstawie rys. 5 oraz wzorów (2) stałe wzmacnienie

$$k_u = S_a Z_0 = \text{const.} \quad (4)$$

Jak wynika z rys. 5, odpowiednich układów czwornika należy poszukiwać wśród filtrów dolnoprzepustowych typu II.

### 3. PODSTAWOWE WŁASNOŚCI FILTRÓW ELEKTRYCZNYCH

Cwórnik elektryczny, składający się z indukcyjnych gałęzi wzdłużnych i pojemnościowych poprzecznych (rys. 6), jest najprostszym przykładem filtra dolnoprzepustowego typu II. Filtr ten odznacza się często-



poniżej której przepuszcza przebiegi elektryczne a powyżej której tłumi je. Wynika to z charakteru oporu wejściowego czwornika, który jest rzeczywisty poniżej częstotliwości granicznej i urojony powyżej tej częstotliwości. Element o urojonym oporze nie może pobierać mocy rzeczywistej z

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} L_k \frac{1}{2} C_k}} = \frac{2}{\sqrt{L_k C_k}}, \quad (5)$$

źródła o oporze rzeczywistym i dlatego nie może dostarczać mocy rzeczywistej do oporu obciążenia. Stąd wynika tłumienie filtru powyżej częstotliwości granicznej.

Wyżej podane własności posiada filtr złożony z elementów bezstratnych, pracujący ze źródła o oporze równym oporowi charakterystycznemu filtru na opór obciążenia również równy oporowi charakterystycznemu filtru.

Wynikający z tej definicji opór charakterystyczny ogniwa podstawowego typu II (rys. 6)

$$\hat{Z}_c = \frac{\sqrt{\frac{L_k}{C_k}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (6)$$

przybiera w zakresie przepuszczania ( $\omega < \omega_0$ ) wartość rzeczywistą

$$Z_c = \frac{\sqrt{\frac{L_k}{C_k}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \quad (7)$$

a w zakresie tłumienia ( $\omega > \omega_0$ ) wartość urojoną

$$\hat{Z}_c = -j \frac{\sqrt{\frac{L_k}{C_k}}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}} \quad (8)$$

(rys. 7). Tę wartość przybiera również opór wejściowy  $\hat{W}_1$  filtru, o ile filtr ten jest obciążony oporem charakterystycznym.

Opór obciążenia filtru jest jednak oporem rzeczywistym o stałej wartości  $R_a$ . Włączenie go wprost na zaciski wtórne filtru wywoła odchylenie oporu wejściowego  $\hat{W}_1$  od oporu charakterystycznego  $\hat{Z}_c$ , bowiem opór  $R_a$  nie jest dopasowany do oporu  $\hat{Z}_c$ .

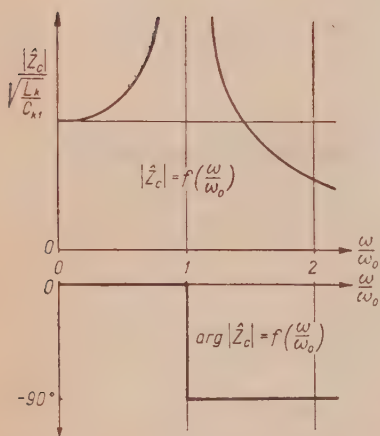
Dopasowanie takie uzyskuje się z techniczną dokładnością za pomocą dopasowujących półogniw pochodnych pierwszego lub wyższych rzędów [2]. Półogniwo pochodne pierwszego rzędu (rys. 8 b i d) różni się tym od

półogniwa podstawowego (rys. 8 a i c) o tym samym oporze charakterystycznym, że jego opór wejściowy przy zwartych wtórnych zaciskach

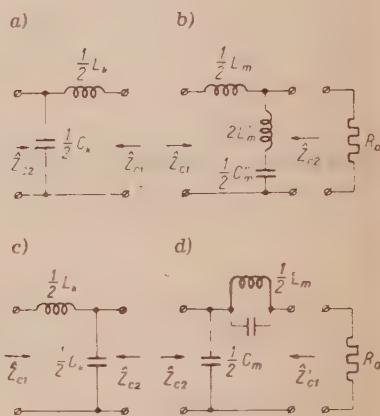
$$\hat{W}'_{1z} = m \hat{W}_{1z}, \quad (9)$$

czyli jest  $m$  razy większy od takiego oporu ogniwa podstawowego, a jego opór wejściowy przy rozwartych wtórnych zaciskach

$$\hat{W}'_{10} = \frac{1}{m} \hat{W}_{10}, \quad (10)$$



Rys. 7. Opór charakterystyczny filtra dolnoprzepustowego typu II



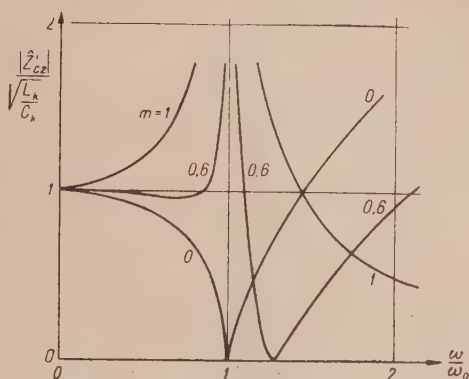
Rys. 8. Półogniwa podstawowe (a, c) i współpracujące z nimi półogniwa pochodne pierwszego rzędu (b, d)

czyli jest  $m$ -tą częścią odpowiedniego oporu ogniwa podstawowego. Przy  $m=1$  półogniwa pochodne przechodzą w półogniwa podstawowe. Półogniwa a i b odznaczają się jednakowym przebiegiem oporu charakterystycznego  $\hat{Z}_{c1}$ , podobnie jak półogniwa c i d jednakowym przebiegiem oporu  $\hat{Z}_{c2}$ . Przebiegi te, niezależne od parametru  $m$ , przedstawione są na rys. 9 i na rys. 10 jako krzywe  $Z'_{c1}$  i  $\hat{Z}'_{c2}$  przy  $m=1$ . Zależności oporów charakterystycznych  $Z'_{c1}$  i  $Z'_{c2}$  od częstotliwości przy różnych wartościach parametru podane są również na rys. 9 i rys. 10.

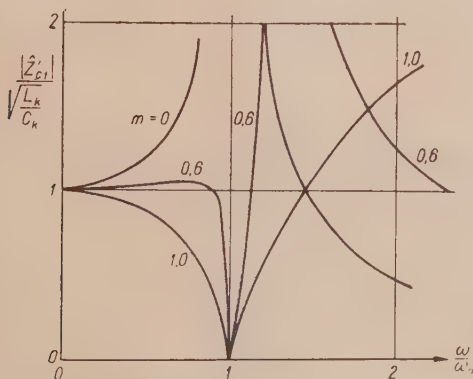
Z krzywych tych wynika, że opory charakterystyczne półogniwa pochodnego pierwszego rzędu, zależne od parametru  $m$ , przybierają najbardziej stałą wartość przy  $m = 0,6$ . W tych warunkach opór  $R_d$  jest dopasowany do półogniwa z dokładnością 4% dla częstotliwości  $\omega \leq 0,9 \omega_0$ .



Stosowanie półogniw pochodnych drugiego rzędu polepsza dopasowanie do 2% dla częstotliwości  $\omega \leq 0,96 \omega_0$ , wymaga jednak większej ilości elementów dobranych również z większą dokładnością.



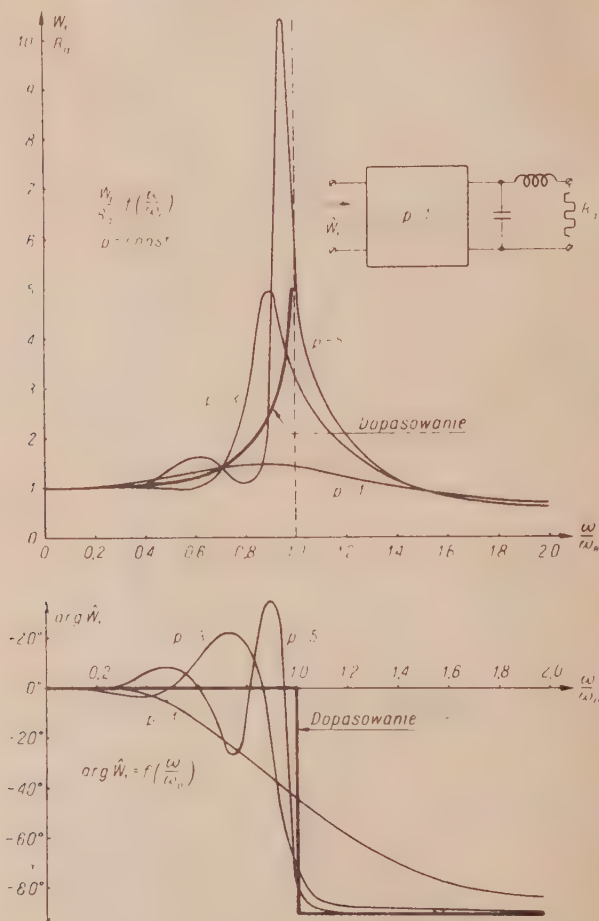
Rys. 9. Opór charakterystyczny ogniwa pochodnego ze strony  $\Pi$



Rys. 10. Opór charakterystyczny ogniwa pochodnego od strony T

Z rozważań powyższych wynika, że przy skończonej liczbie elementów w półogniwie dopasowującym nie można uzyskać zupełnego dopasowania oporu rzeczywistego  $R_a$  do oporu charakterystycznego ogniwa podstawowego. Rezultatem tego braku zupełnego dopasowania są odchylenia przebiegów oporów wejściowych ogniwa dopasowujących, obciążonych oporem rzeczywistym, od przebiegów oporów charakterystycznych.

nych  $Z_{c1}$  i  $Z_{c2}$ . Odchylenia te są największe przy częstotliwości granicznej  $\omega_0$  i na ogół maleją, gdy częstotliwość maleje do zera.



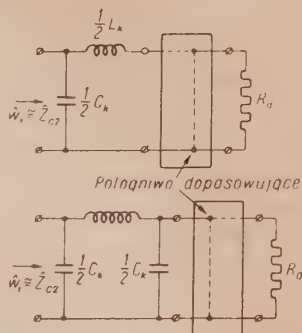
Rys. 11. Opór wejściowy filtra złożonego z  $p$  półogniw podstawowych, obciążonego oporem  $R_n$  od strony oporu  $\hat{Z}_{c1}$

Jeśli połączymy tak obciążone ogniwo dopasowujące z półogniwem podstawowym w odpowiedni sposób (rys. 8), to opór wejściowy ogniwa podstawowego będzie również ulegać odchyleniom przebiegu oporu charakterystycznego. Wynika to stąd, że między ogniwem podstawowym a półogniwem dopasowującym wystąpią odbicia.

względem na elektryczną przezroczystość ogniwa podstawowego w zakresie przepuszczania odbicia te wywołują odchylenia oporu wejściowego ogniwa podstawowego od oporu charakterystycznego. Odchylenia te zależą w znacznej mierze od liczby półogniw podstawowych, zawartych między zaciskami wejściowymi filtru a półogniwem dopasowującym (rys. 11).

W zakresie tłumienia odbicia podlegają tłumieniu, więc w tym zakresie omawiane odchylenia maleją.

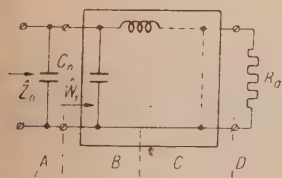
Z powyższego wynika, że włączanie między ogniwnem podstawowym a dopasowującym jakichkolwiek ogniw dolnoprzepustowych o częstotliwościach granicznych, nie mniejszych od  $\omega_0$ , pogarsza przebieg oporu wejściowego ogniwa podstawowego w zakresie przepuszczania. Reasumując nasze rozważania możemy stwierdzić, że układy podane na rys. 12 odznaczają się oporem wejściowym, przedstawionym na rys. 7 w założeniu, że półogniwo dopasowujące spełnia swą rolę z dokładnością wymaganą warunkami.



Rys. 12. Układy o oporze wejściowym, zbliżonym do oporu charakterystycznego (rys. 7)

#### 4. FILTR DOLNOPRZEPUSTOWY JAKO DWÓJNIK O STAŁEJ WARTOŚCI OPORU WEJŚCIOWEGO

Celem otrzymania stałego wzmocnienia należy uczynić według równania (4) opór obciążenia lampy  $Z_0$  stałym w interesującym nas zakresie częstotliwości. Rozważane natomiast przez nas układy z rys. 12 posiadają w najlepszym razie opór wejściowy równy oporowi charakterystycznemu (rys. 7). Opór ten wzrasta z częstotliwością w pasmie przepuszczania, nie jest więc odpowiedni do naszych celów. Z rys. 1 jednak widzimy, że opór pojemnościowy maleje z częstotliwością. Stąd narzuca się myśl, że włączenie dodatkowej pojemności  $C_n$  na zaciski



Rys. 13. Filtr o stałym oporze wejściowym

wejściowe ogniwa podstawowego może wyrównać przebieg oporu wejściowego  $\hat{W}_1 = \hat{Z}_c$  w funkcji częstotliwości (rys. 13) [1].

Wówczas opór wejściowy całkowitego układu  $\hat{Z}_0$  oblicza się z równania

$$\frac{1}{\hat{Z}_0} = \frac{1}{\hat{Z}_c} + j\omega C_n. \quad (11)$$

Zakładając, że

$$\sqrt{\frac{L_k}{C_k}} = R_a \quad (12)$$

i

$$C_n = \frac{n}{\omega_0 R_a}, \quad (13)$$

otrzymujemy

$$\hat{Z}_0 = \frac{R_a}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + jn \frac{\omega}{\omega_0}}} \quad (14)$$

W pasmie przepuszczania moduł tego wyrażenia

$$Z_0 = \frac{R_a}{\sqrt{1 - (1 - n^2) \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}, \quad (15)$$

a jego kąt fazowy

$$\varphi_0 = -\arctg \frac{n}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1}} \quad (16)$$

Powyższe zależności przedstawione są na rys. 14. Z podanych tam krzywych wynika, że stałą wartość modułu oporu wejściowego układu z rys. 13 otrzymuje się w zakresie przepuszczania dla  $n=1$ , to znaczy dla

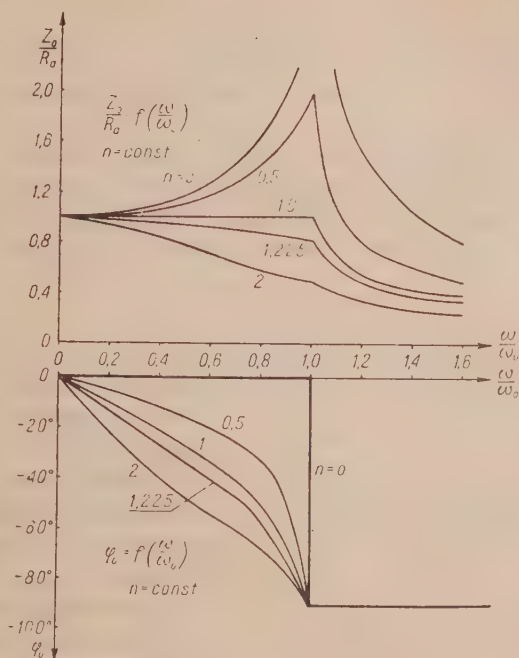
$$C_n = \frac{1}{\omega_0 R_a} = \frac{1}{2} C_k \quad (17)$$

dla pojemności dodatkowej, równej pojemności gałęzi poprzecznej ogniwa podstawowego.

W tych warunkach kąt fazowy oporu wejściowego przybiera wartości ujemne, niestety nie proporcjonalne do częstotliwości (rys. 14). Największe odchylenia od proporcjonalności występują przy częstotliwości granicznej filtru.



Najbardziej zbliżony do liniowego w pobliżu zera przebieg kąta fazowego  $q_0$  uzyskuje się dla  $n=1,22$ , naturalnie pogarszając w ten sposób



Rys. 14. Opór wejściowy filtru z rys. 13

równomierność przebiegu modułu oporu  $Z_0$ . Stąd widać, że w rozważanym układzie nie można równocześnie uzyskać płaskiej charakterystyki wzmocnienia w funkcji częstotliwości, jak również proporcjonalnej do częstotliwości charakterystyki fazowej.

##### 5. MAKSYMALNE MOŻLIWOŚCI WZMACNIAJĄCE UKŁADU DWÓJNIKOWEGO

Z rozważań powyższych wynika, że włączenie w obwód anodowy lampy układu według rys. 13 o oporze wejściowym

$$Z_0 = R_a = \frac{2}{\omega_0 C_k} = \frac{2}{\omega_0 C_p}, \quad (18)$$



## 6. BUDOWA DWOJNIKOWYCH UKŁADÓW FILTROWYCH

Na podstawie powyższych rozważań można określić sposób budowy układów filtrowych. Układy te składają się w zasadzie z czterech części: pojemności dodatkowej  $C_n$  (A), półogniwa podstawowego (B), półogniwa dopasowującego (C) i oporu anodowego (D) (rys. 13). Półogniwo dopasowujące (zwykle w postaci półogniwa pochodnego) może być typu II (rys. 8) lub typu T (rys. 8).

Wzmacniacz oporowy jest zdegenerowaną postacią układu filtrowego, zawierającą tylko pojemność dodatkową (A) i opór anodowy (D) (rys. 1).

Jako następny przykład może służyć układ wzmacniacza szerokopasmowego z tak zwaną kompensacją indukcyjnością szeregową (rys. 16). Półogniwem dopasowującym jest półogniwo podstawowe o oporze wejściowym od strony T, podanym na rys. 10 (krzywa dla  $m=1,0$ ). Ze względu na spadek tego oporu w funkcji częstotliwości przyjmuje się

$$R_a = d \sqrt{\frac{L_k}{C_k}}, \quad (22)$$

gdzie  $d = 0.7 : 1$ . Uwzględniając zależność (3) otrzymujemy z równania (22) indukcyjność kompensującą

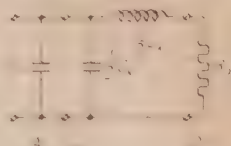
$$\frac{1}{2} L_k = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2} \frac{R_a}{\omega_g}, \quad (23)$$

Teraz możemy obliczyć częstotliwość graniczną półogniwa filtru z równania (5) w postaci

$$\omega_0 = 2d\omega_g. \quad (24)$$

W końcu określamy dobroć gałęzi rezonansowej przy częstotliwości granicznej  $\omega_0$

$$Q_g = \frac{1}{2} \frac{L_k \omega_g}{R_a} = \frac{1}{2d^2}. \quad (25)$$



$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{2}{\sqrt{L_k C_k}} = \sqrt{\frac{2}{Q_g}} \omega_g, \\ \frac{1}{2} L_k &= \sqrt{2Q_g} \frac{R_a}{\omega_0} = Q_g \frac{R_a}{\omega_g}, \\ \frac{1}{2} C_k &= \frac{1}{\sqrt{2Q_g}} \frac{1}{\omega_g R_a} = \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_g R_a}, \\ C_p &= C_n + \frac{1}{2} C_k = C_k = \frac{1}{\omega_g R_a}. \end{aligned}$$

16. Układ kompensujący indukcyjnością szeregową

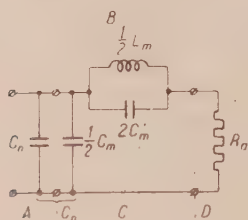
Teraz można przystąpić do napisania wzorów obliczeniowych układu, podanych przy rys. 16.

Dalszym przykładem służyć będzie układ o kompensacji szeregowej równoległym obwodem rezonansowym (rys. 17). Tutaj dopasowanie odbywa się za pomocą półogniwa pochodnego typu  $T$  o  $m=0,6$  w założeniu, że

$$\sqrt{\frac{L_k}{C_k}} = R_a. \quad (26)$$

Porównując z sobą układy z rys. 16 i 17 przy jednakowej wartości pojemności szkodliwej  $C_p$  i jednakowym dopasowaniu, określonym równaniem (26), znajdujemy, że

$$\omega'_0 = 0,8\omega_0 = 1,6\omega_g. \quad (27)$$



$$\omega'_0 = \frac{2}{\sqrt{L_k C_k}} = 1,6 \omega_g,$$

$$\frac{1}{2} L_m = \frac{1}{2} m L'_k - 0,6 \frac{R_a}{\omega'_0} = \frac{0,375 R_a}{\omega_g}.$$

$$2C'_m = \frac{1-m^2}{m} \frac{1}{\omega'_0 R_a} = \frac{1,067}{\omega'_0 R_a} = 0,667 C_p,$$

$$\frac{1}{2} C_m = \frac{m}{\omega'_0 R_a} = \frac{0,6}{\omega'_0 R_a}.$$

$$C_p = C_n + \frac{1}{2} C_m = 0,8 C'_k = \frac{1}{\omega_g R_a},$$

$$Q_g = \frac{\omega_g \cdot \frac{1}{2} L_m}{R_a} = 0,375.$$

Rys. 17. Układ kompensujący równoległym obwodem rezonansowym

Wynika, że chcąc otrzymać prawidłowe dopasowanie filtru zarówno do oporu obciążenia, jako też do lampy — należy do oporu obciążenia dołączać ogniwa pochodne a do lampy ogniwa podstawowe.

Filtr z rys. 17 zbudowany na jednakowej pojemności szkodliwej z filtrem z rys. 16 posiada mniejszą częstotliwość graniczną.

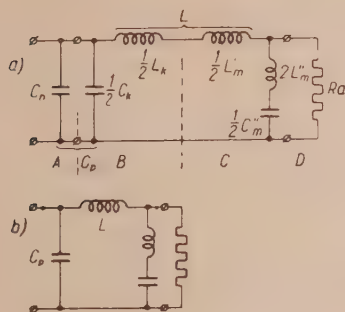
Z rozważań tych wynika, że aczkolwiek półogniwo filtru pochodnego dopasowuje się lepiej do oporu  $R_a$  niż półogniwo podstawowe, to jednak dopasowanie do lampy jest znacznie gorsze, gdyż nie spełnia warunku (określonego równaniem (17)), wyznaczonego w założeniu, że ogniwo wejściowe jest typu podstawowego. Przeprowadzenie podobnego rachunku dla ogniwa pochodnego daje w wyniku  $n$  urojone dla  $m \leq \frac{1}{2}$ , co

oznacza, że przy dodawaniu pojemności na wejściu ogniwa pochodnego nie uzyskuje się stałego modułu oporu wejściowego.

Z podanych dotychczas przy-



Najprostszy układ, oparty na tej zasadzie, podano na rys. 18. Lewa część filtru jest półogniwem podstawowym typu T, natomiast prawa jest półogniwem pochodnym typu II. W obu tych półogniwach założono, że



$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{L_k C_k}} = 2 \omega_g,$$

$$\frac{1}{2} L_k = \frac{R_a}{\omega_0} = \frac{R_a}{2 \omega_g},$$

$$\frac{1}{2} C_k = \frac{1}{\omega_0 R_a} = \frac{1}{2 \omega_g R_a},$$

$$\frac{1}{2} L'_m = m \frac{R_a}{\omega_0} = 0,6 \frac{R_a}{\omega_0},$$

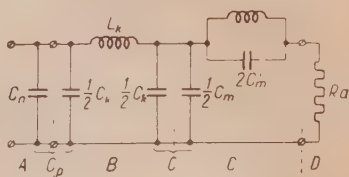
$$2 L''_m = \frac{1 - m^2}{m} \frac{R_a}{\omega_0} = 1,067 \frac{R_a}{\omega_0} = 0,53 \frac{R_a}{\omega_g},$$

$$\frac{1}{2} C'_m = \frac{m}{\omega_0 R_a} = \frac{0,6}{\omega_0 R_a} = \frac{0,3}{\omega_g R_a} = 0,3 C_p,$$

$$C_p = C_n + \frac{1}{2} C_k = C_k = \frac{1}{\omega_g R_a},$$

$$L = \frac{1}{2} L_k + \frac{1}{2} L'_m = \frac{1,6}{\omega_0} R_a = 0,8 \frac{R_a}{\omega_g}.$$

Rys. 18. Układ kompensujący z półogniwem podstawowym i półogniwem pochodnym typu II



$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{L_k C_k}} = 2 \omega_g.$$

$$\frac{1}{2} C_k = \frac{1}{\omega_0 R_a} = \frac{1}{2 \omega_g R_a}.$$

$$C_p = C_n + \frac{1}{2} C_k = C_k = \frac{1}{\omega_g R_a}.$$

$$\frac{1}{2} C'_m = \frac{0,6}{\omega_0 R_a} = \frac{0,3}{\omega_g R_a}.$$

$$C = \frac{1}{2} C_k + \frac{1}{2} C'_m = \frac{1,6}{\omega_0 R_a} = 0,8 C_p.$$

$$\frac{0,8}{\omega_g R_a} = 0,8 C_p.$$

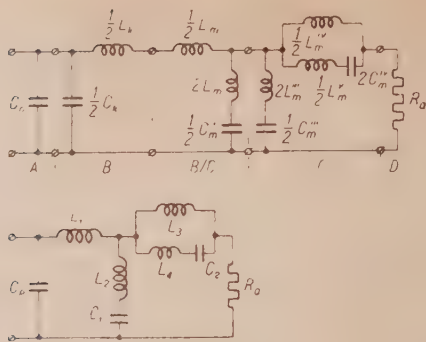
$$2 C'_m = \frac{1,067}{\omega_0 R_a} = 0,533 C_p,$$

$$L_k = \frac{2 R_a}{\omega_0} = \frac{R_a}{\omega_g}.$$

$$\frac{1}{2} L'_m = 0,6 \frac{R_a}{\omega_0} = 0,3 \frac{R_a}{\omega_g}.$$

19. Układ kompensujący z ogniwem podstawowym i półogniwem pochodnym typu T

równanie (26) jest spełnione. W rezultacie otrzymuje się częstotliwość graniczną filtru spełniającą równanie (20), czyli optymalne warunki pracy pod względem teoretycznej szerokości pasma częstotliwości.



$$\omega_0^2 = \frac{2}{L_k C_k} = 2 \omega_g,$$

$$\frac{1}{2} C_k = \frac{1}{\omega_0 R_a} = \frac{1}{2 \omega_0 R_a}.$$

$$C_p = C_n + \frac{1}{2} C_k = C_k = \frac{1}{\omega_g R_a},$$

$$\frac{1}{2} L_k = \frac{R_a}{\omega_0} = \frac{R_a}{2 \omega_g},$$

$$\frac{1}{2} L_m' = m \frac{R_a}{\omega_0} = 0,7230 \frac{R_a}{\omega_0},$$

$$L_1 = \frac{1}{2} L_k + \frac{1}{2} L_m' = 1,7230 \frac{R_a}{\omega_0}$$

$$= 0,8615 \frac{R_a}{\omega_g},$$

$$2 L_m'' = \frac{1 - m^2}{m} \frac{R_a}{\omega_0} = 0,660 \frac{R_a}{\omega_0}$$

$$= 0,330 \frac{R_a}{\omega_g},$$

$$\frac{1}{2} C_m'' = \frac{m}{\omega_0 R_a} = \frac{0,7230}{\omega_0 R_a} = \frac{0,3615}{\omega_g R_a},$$

$$C_2 = 2 C_m^V = \frac{m(1 - m'^2)}{m' \omega_0 R_a} = \frac{1,450}{\omega_0 R_a} = \frac{0,725}{\omega_g R_a}.$$

$$2 L_m''' = \frac{1 - m^2}{mm'} \frac{R_a}{\omega_0} = 0,160 \frac{R_a}{\omega_0}$$

$$= 0,080 \frac{R_a}{\omega_g},$$

$$L_2 = \frac{1 - m^2}{m(1 + m')} \frac{R_a}{\omega_0} =$$

$$= 0,4670 \frac{R_a}{\omega_0} = 0,2335 \frac{R_a}{\omega_g},$$

$$\frac{1}{2} C_m''' = \frac{mm'}{\omega_0 R_a} = \frac{0,2988}{\omega_0 R_a} = \frac{0,1494}{\omega_g R_a},$$

$$C_1 = \frac{m(1 + m')}{\omega_0 R_a} = \frac{1,022}{\omega_0 R_a} = \frac{0,511}{\omega_g R_a}$$

$$L_3 = \frac{1}{2} L_m^{IV} = m m' \frac{R_a}{\omega_0} =$$

$$= 0,2988 \frac{R_a}{\omega_0} = 0,1494 \frac{R_a}{\omega_g},$$

$$L_4 = \frac{1}{2} L_m^V = \frac{m'(1 - m^2)}{m(1 - m'^2)} \frac{R_a}{\omega_0} =$$

$$= 0,3292 \frac{R_a}{\omega_0} = 0,1646 \frac{R_a}{\omega_g},$$

Rys. 20. Układ kompensujący z półogniwem podstawowym, półogniwem pochodnym pierwszego rzędu i półogniwem drugiego rzędu [5]

Omawiany układ jest jednak czuły na pojemności bocznikujące opór  $R_a$  i z tego powodu czasami korzystniejsze jest stosowanie półogniwa dopasowującego typu  $T$ , połączonego z ogniwnem podstawowym (rys. 19).

Jak wynika z rozważań podanych w rozdziale 3, dalsze udoskonalenie układów może polegać jedynie na polepszeniu dopasowania oporu  $R_a$  do półogniwa podstawowego przez zastosowanie półogniwa pochodnego wyższego rzędu.

Przykład takiego dopasowania podany jest na rys. 20, który przedstawia kolejne dopasowanie oporu obciążenia  $R_a$  półogniwem pochodnym drugiego rzędu o parametrach  $m=0,7230$  i  $m'=0,4134$ , dalej półogniwem pochodnym pierwszego rzędu o  $m=0,7230$  i na koniec półogniwem podstawowym (rys. 20). Ta cała dość skomplikowana struktura filtru upraszcza się znacznie przez odpowiednie połączenie elementów różnych półogniw (rys. 20) i wymaga 6 dodatkowych elementów ( $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  i  $L_4$  oraz  $C_1$  i  $C_2$ ). Należy tutaj zwrócić uwagę, że elementy filtru zwłaszcza półogniwa pochodnego drugiego rzędu powinny być dobrane z dużą dokładnością.

Ta wada spowodowała, że układy z ogniwnami pochodnymi drugiego i wyższego rzędu nie były dotychczas realizowane w praktyce zwłaszcza, że znacznie szersze pasmo częstotliwości można uzyskać za pomocą prostszych i łatwiejszych do zrealizowania układów czwórnikowych, o których będzie mowa w dalszej części pracy.

## 7. OBLICZANIE WZMOCNIENIA I JEGO KĄTA FAZOWEGO UKŁADÓW DWÓJNIKOWYCH

Wzmocnienie napięciowe układu dwójnikowego z rys. 4 wyrażone w postaci zespolonej wzorem (2) posiada moduł

$$k_u = S_a Z_0 \quad (28)$$

oraz względny kąt fazowy

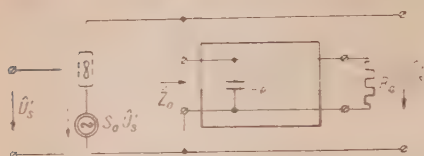
$$\theta = \arg Z_1 = \varphi_1. \quad (29)$$

Chcąc obliczyć wzmocnienie i jego kąt fazowy musimy więc najpierw wyznaczyć opór obciążenia lampy  $\hat{Z}_0$ . Odpowiadająca jemu przewodność  $\hat{Y}_0$  wynosi według rys. 21

$$\hat{Y}_0 = \frac{1}{\hat{Z}_0} = j\omega C_n + \frac{1}{\hat{W}_1}, \quad (30)$$

gdzie  $W_1$  jest oporem wejściowym czwórnika obciążonego po stronie wtórnej oporem  $R_a$ .

Równanie to przekształcimy w założeniu, że  $n = 1$  (warunek najbardziej płaskiej charakterystyki wzmocnienia w pasmie przepuszczania) i przedstawimy w postaci



Rys. 21. Schemat zastępczy lampy z filtrem jako dwójnikiem obciążającym

$$\frac{R_a}{\hat{Z}_0} = j \frac{\omega}{2\omega_g} - \frac{R_a}{\hat{W}_1}, \quad (31)$$

która pozwoli na łatwe obliczenie oporu  $\hat{Z}_0$  przy znajomości oporu wejściowego filtru  $\hat{W}_1$ .

Opór wejściowy filtru oblicza się według znanego z teorii czwórników [6] wzoru

$$\hat{W}_1 = \hat{Z}_c \frac{\hat{Z}'_c \sinh \hat{g} + R_a \cosh \hat{g}}{\hat{Z}'_c \cosh \hat{g} + R_a \sinh \hat{g}}, \quad (32)$$

w którym  $Z_c$  i  $Z'_c$  wyrażają opory charakterystyczne filtru ze strony źródła (lampy) i ze strony oporu obciążenia, a

$$\hat{g} = b + ja \quad (33)$$

przenoszenie charakterystyczne tego filtru.

Charakterystyczny opór wejściowy filtru  $\hat{Z}_c$  jest przedstawiony na rys. 7 i określony wzorami (6), (7) i (8). Ponieważ dla półogniwa podstawowego typu II od strony wejściowej (od strony lampy) (rys. 8) przesunięcie charakterystyczne w zakresie przepuszczania

$$\frac{1}{2} a_k = \arcsin \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (34)$$

a tłumienie charakterystyczne w zakresie tłumienia

$$\frac{1}{2} b_k = \ln \left( \frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1} \right) = \operatorname{arcosh} \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (35)$$

wiec dla obu tych zakresów

$$\hat{Z}_c = d \sqrt{\frac{L_k}{C_k}} \frac{1}{\cosh \frac{1}{2} \hat{g}_k} = d \sqrt{\frac{L_k}{C_k}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}, \quad (36)$$



gdzie  $d$  jest określone równaniem (22). Natomiast charakterystyczny opór wyjściowy filtru  $\hat{Z}'_c$  przybiera różne formy zależnie od typu ogniwa dopasowującego (rys. 9 i 10), jednak zawsze jest postaci

$$\hat{Z}'_c = d' \sqrt{\frac{L_k}{C_k}} f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right), \quad (37)$$

gdzie  $d'$  jest zdefiniowane podobnie jak  $d$  równaniem (22).

Przenoszenie charakterystyczne filtru składa się z przenoszenia ogniwa podstawowych, znajdujących się w ilości  $1 \div 2$  ( $k=1 \div 2$ ) oraz z przenoszenia półogniwa dopasowującego

$$\hat{g} = k \frac{\hat{g}_k}{2} + \frac{\hat{g}_m}{2} = \frac{1}{2} [kb_k + b_m + j(ka_k + a_m)]. \quad (38)$$

Na podstawie powyższych rozważań przedstawimy opór wejściowy czwórnika w postaci

$$\frac{\hat{W}_1}{R_a} = \frac{1}{d \cosh \frac{1}{2} \hat{g}_k} \frac{f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \sinh \hat{g} + d' \cosh \hat{g}}{f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \cosh \hat{g} + d' \sinh \hat{g}} \quad (39)$$

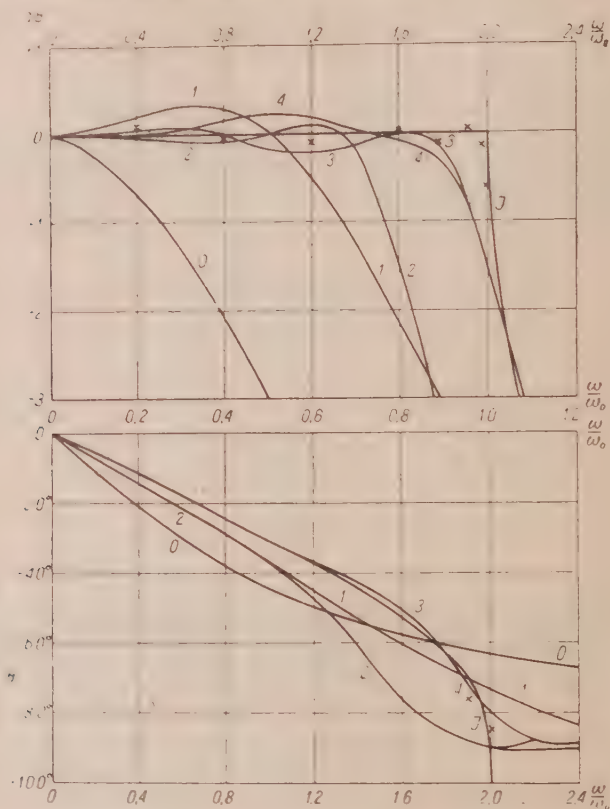
W przypadku szczególnym, gdy układ kompensujący zawiera tylko jedno półogniwo, to równanie (39) upraszcza się nieco, gdyż  $d=d'$ . Przy większej ilości półogniw zwykle stosuje się równanie (26), co prowadzi do  $d=d'=1$ .

Z równań (30) i (39) można znaleźć przebieg zmienności oporu obciążenia w funkcji częstotliwości:  $\hat{Z}_0 = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ . W prostszych układach, jak np. w układzie o kompensacji indukcyjnością szeregową (rys. 16) można drogą przekształceń otrzymać tę zależność, która prowadzi do równania na wzmocnienie  $\hat{k}_u = f\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ . Należy tutaj zaznaczyć, że wynik ten otrzymać jest znacznie łatwiej drogą sumowania oporów.

W układach bardziej skomplikowanych, a zwłaszcza składających się z kilku półogniw (rys. 18 i 19), wygodniej jest przeliczyć opór  $\hat{Z}_0$  wprost ze wzorów (30) i (39) dla danych warunków pracy i przedstawiać zależność wzmocnienia w funkcji częstotliwości w postaci wykresów. Przykłady takich przeliczeń podane są na rys. 22, na których porównano względne wzmocnienie i kąty fazowe różnych układów kompensacyjnych

w funkcji częstotliwości [5]. Nadmienić należy, że w tych przypadkach metoda sumowania oporów jest żmudniejsza.

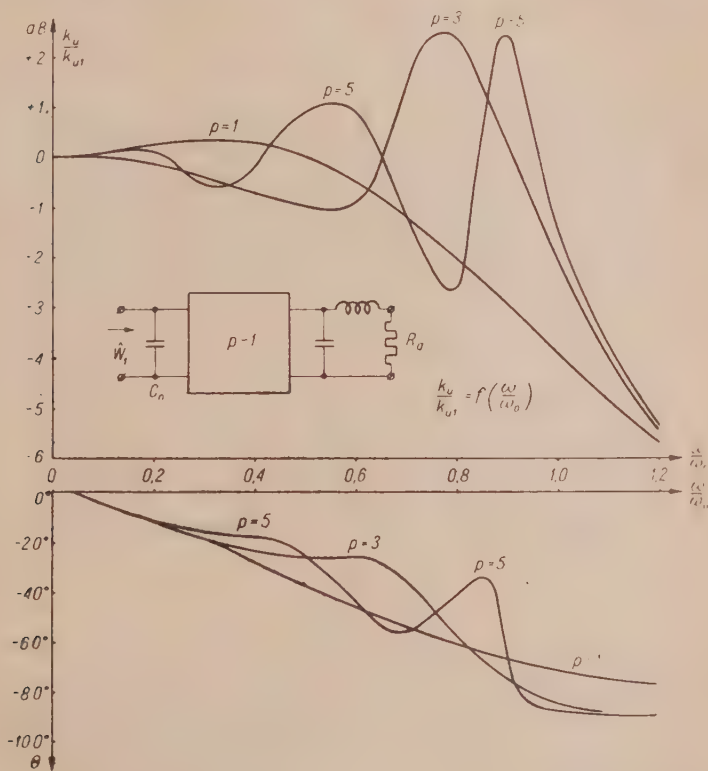
Z krzywych podanych na rys. 22 wynika, że układ z rys. 18 mimo swej prostoty dostarcza wyników w znacznym stopniu zbliżających się



- 0 — wzmacniacz oporowy nieskompensowany (rys. 1).  
 1 — wzmacniacz oporowy, skompensowany szeregową indukcyjnością ( $d=1$ , czyli  $Q=0.5$ ) (rys. 16).  
 2 — wzmacniacz oporowy, skompensowany równoległym obwodem rezonansowym ( $d=1$ ;  $Q=0.375$ ,  $\frac{2C'_m}{C_p} = 0.667$ ) (rys. 17).  
 3 — wzmacniacz oporowy, skompensowany według rys. 18.  
 4 — wzmacniacz oporowy, skompensowany według rys. 19.  
 5 — wzmacniacz oporowy, skompensowany według rys. 20 (punkty oznaczono krzyżykami).  
 I — wzmacniacz oporowy, skompensowany filtrem idealnym.

Rys. 22. Charakterystyki względnego wzmocnienia i jego względnego kąta fazowego w funkcji zredukowanej częstotliwości

do krzywej idealnej; otrzymujemy tutaj prawie 95 % wykorzystania pasma teoretycznego. Stosowanie dalszego przybliżenia nie jest opłacalne ze względu na trudność doboru elementów filtrów pochodnych wyższego rzędu, tym bardziej że opisane w dalszej części pracy układy pozwalają



Rys. 23. Charakterystyki względnego wzmocnienia i jego względnego kąta fazowego w funkcji zredukowanej częstotliwości układu złożonego z  $p$  półogniw podstawowych, obciążonego oporem  $R_0$  od strony  $\bar{Z}_C$ , i posiadającego na wejściu do-

$$\text{datkową pojemność } C_n = \frac{1}{2} C_k$$

na otrzymanie szerszego pasma mniejszym kosztem. Dalej należy zwrócić uwagę, że w dotychczasowych rozważaniach pomijano wpływ strat w cewkach i kondensatorach. Wpływ ten dążący do zaokrąglania krzywych w pobliżu częstotliwości granicznej  $\omega_0$  niweczy w pewnym stopniu zysk uzyskane z lepszego dopasowania bardziej skomplikowanymi układami.

Należy również zaznaczyć, że stosunkowo wąskie pasmo krzywej 2 wynika z małej częstotliwości granicznej półogniwa filtru pochodnego, włączonego wprost do lampy.

W końcu należy zwrócić uwagę na rys. 23 podający charakterystykę wzmocnienia i jego względnego kąta fazowego układu złożonego z  $p$  półogniw podstawowych, obciążonego oporem  $R_a$  od strony oporu  $\hat{Z}_{c1}$  i mającego na wejściu dodatkową pojemność  $C_n = \frac{1}{2} C_k$ . Z rysunku tego widać, że w miarę wzrostu liczby półogniw  $p$  charakterystyki wzmocnienia i jego względnego kąta fazowego pogarszają się. Potwierdza to fakt omówiony w rozdziale czwartym i stwierdzający, że włączanie dodatkowych ogniw dolnoprzepustowych o częstotliwościach granicznych mniejszych od  $\omega_0$  nie tłumi odbić, wywołanych niedopasowaniem oporu  $R_a$  do półogniwa z nim współpracującego — przeciwnie nawet odbicia te uwydatnia.

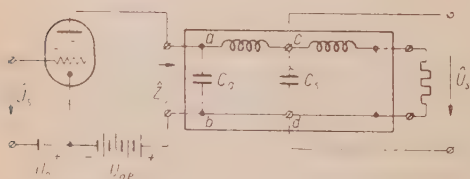
### 3. FILTR DOLNOPRZEPUSTOWY JAKO CZWÓRNIK SPRZĘGAJĄCY

Ze wzoru (18) wynika, że największy opór wejściowy filtru  $Z_0$  o stałej wartości w zakresie przepuszczania jest odwrotnie proporcjonalny do pojemności szkodliwej  $C_p$ . Pojemność szkodliwą można podzielić na dwie części: jedną  $C_a$  związaną z obwodem anodowym lampy rozważanej i drugą  $C_s$  związaną z obwodem siatkowym lampy następnej

$$C_p = C_a + C_s. \quad (40)$$

Pojemności te są tego samego rzędu wielkości; przez odpowiednie zabiegi schematowe można je uczynić w razie potrzeby równymi sobie, czasem kosztem niewielkiego powiększenia pojemności szkodliwej  $C_p$ .

Umieszczenie tych pojemności w filtrze jako pierwszą i drugą pojemność ogniwa podstawowego (rys. 24) pozwala na zwiększenie oporu wejściowego filtru  $Z_0$  do wartości



Rys. 24. Filtr dolnoprzepustowy jako czwórnik sprzęgający

$$Z_0 = \frac{2}{\omega_0 C_a} > \frac{2}{\omega_0 C_p}. \quad (41)$$

W założeniu ważności równania (17) moduł oporu wejściowego filtru jest stały aż do częstotliwości  $\omega_0$ . Między punktami  $ab$  i  $cd$  ogniwa podstawowego nie ma tłumienia w pasmie przepuszczania; występuje tutaj jedy-



nie przesunięcie fazowe, zmieniające się od zera do  $-180^\circ$  w miarę wzrostu częstotliwości od zera do częstotliwości granicznej filtru  $f_0$ . W rezultacie wzmocnienie układu jest stałe i wynosi według równania (4) w paśmie przepuszczenia filtru

$$k_u = \frac{S_a}{\pi f_0 C_a} \quad (42)$$

Kąt fazowy wzmocnienia jest sumą kąta fazowego  $\varphi_0$  oporu wejściowego filtru, zaczynającego się od zacisków cd (rys. 24) oraz kąta przesunięcia fazowego jednego ogniwa podstawowego, występującego między zaciskami ab i cd. Kąt fazowy wzmocnienia rośnie więc w granicy do  $-270^\circ$ , co stanowi niewątpliwą wadę tego typu wzmacniaczy w układach z ujemnym sprzężeniem zwrotnym.

Porównanie układu czwórnikowego z rys. 24 z układem dwójnikowym z rys. 4 w postaci stosunku iloczynów wzmocnienia w zakresie przepuszczania przez częstotliwość graniczną

$$\frac{(k_u f_0)_{IV}}{(k_u f_0)_{II}} = \frac{C_p}{C_a} \quad (43)$$

wykazuje dla zależności  $C_a = C_s$  występującej w układach filtrowych złożonych z co najmniej z półtora ogniwa podstawowego wartość

$$\frac{(k_u f_0)_{IV}}{(k_u f_0)_{II}} = 2, \quad (44)$$

czyli dwukrotnie większe możliwości wzmacniające układu czwórnikowego niż układu dwójnikowego. Zależność ta mówi również, że przy jednakowych oporach anodowych  $R_a$  najszersze pasmo układu czwórnikowego

$$f_{0IV} = 4f_g. \quad (45)$$

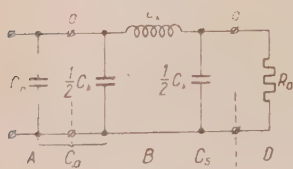
To jest największa wartość częstotliwości granicznej, osiągana za pomocą filtrów drabinkowych. Za pomocą filtrów innego typu (mostkowych) można uzyskać nieco większą wartość [5]

$$f_{0X} = \frac{\pi^2}{2} f_g \approx 4,94 f_g, \quad (46)$$

prowadzącą jednak do skomplikowanych i trudnych do zrealizowania struktur filtru.

## 9. BUDOWA CZWÓRNIKOWYCH UKŁADÓW FILTROWYCH

Przystępując do rozważania po kolei układów czwórnikowych zastanowimy się najpierw nad najprostszym (rys. 25). W tym układzie czwórnik sprzęgający w postaci ogniwa podstawowego jest obciążony oporem



$$\omega'_0 = 3 \omega_g.$$

$$L = L_k = 2 \frac{R_a}{\omega'_0} = \frac{2}{3} \frac{R_a}{\omega_g} =$$

$$= R_a^2 C_a = 2 R_a^2 C_s,$$

$$C_s = \frac{1}{2} C_k = \frac{1}{\omega'_0 R_a} = \frac{0,333}{\omega_g R_a},$$

$$C_a = C_n + \frac{1}{2} C_k = \frac{2}{\omega_0 R_a} = 2 C_s =$$

$$= \frac{0,666}{\omega_g R_a},$$

$$C_p = C_a + C_s = 1,5 C_a = 3 C_s,$$

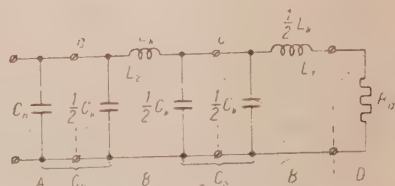
$$R_a = \frac{0,333}{\omega_g C_s} = \frac{1}{\omega_g R_p},$$

$$C_s = 0,33,$$

$$C_p$$

$$\omega_g^2 L C_a = 0,445.$$

Rys. 25. Układ o kompensacji równoległej w postaci filtru o ogniwie podstawowym



$$\omega'_0 = 4 \omega_g,$$

$$L_1 = \frac{1}{2} L_k = \frac{R_a}{\omega_0} = 0,25 R_a^2 C_p.$$

$$L_2 = L_k = 0,5 R_a^2 C_p,$$

$$C_a = C_n + \frac{1}{2} C_k = C_k = \frac{2}{\omega_0 R_a} = \frac{1}{2 \omega_g R_a},$$

$$C_s = C_k,$$

$$C_p = C_a + C_s = 2 C_k,$$

$$\frac{C_s}{C_p} = 0,5.$$

$$Q_g = \frac{\omega_g L_1}{R_a} = 0,25,$$

$$\omega_g^2 L^2 C_a = 0,25.$$

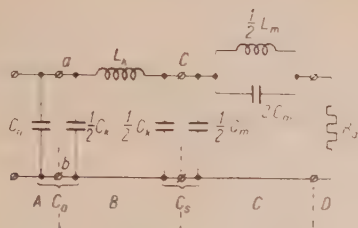
Rys. 26. Układ o kompensacji szeregowo-równoległej w postaci filtru o półtora ogniwie podstawowym

anodowym. Częstotliwość graniczną takiego filtru obliczymy z równań (20) i (43) w postaci.

$$\omega'_0 = 3 \omega_g.$$

(47)

Otrzymujemy mniejszą wartość częstotliwości granicznej od wartości podanej równaniem (45), wynikającą stąd, że pojemność poprzeczna filtru na zaciskach cd jest mniejsza od pojemności wejściowej filtru.



$$\omega_0 = 3.6 \omega_g''$$

$$L_1 = \frac{1}{2} L_m = 0.6 \frac{R_a}{\omega_0''} = \frac{0.167}{\omega_g''} R_a$$

$$L_2 - L_k = 2 \frac{R_a}{\omega_0''} = \frac{0.555 R_a}{\omega_g''}$$

$$C_a = C_n + \frac{1}{2} C_k = C_k = \frac{2}{\omega_0'' R_a} = \frac{0.555}{\omega_g R_a}$$

$$C_s' = \frac{1}{2} C_k + \frac{1}{2} C_m = \frac{1.6}{\omega_0'' R_a} = \frac{0.455}{\omega_g R_a}$$

$$C_p = C_a + C_s = \frac{3.6}{\omega_0'' R_a} = \frac{1}{\omega_g R_a}$$

$$C_s = 2 C_m' = \frac{0.296}{\omega_g R_a}$$

$$\begin{array}{cc} C_s & 0.445 \\ C_p & 0.296 \end{array}$$

$$Q_g = \frac{\omega_g L_1}{R_a} = 0.166$$

$$\omega_g^2 L_2 C_s = 0.31$$

Rys. 27. Układ kompensacyjny o ogniwie podstawowym i półogniwie pochodnym pierwszego rzędu ( $m=0,6$ )

Zaradzić temu można włączając między zaciski od a opór anodowy  $R_a$  półogniwo podstawowe (rys. 26). W ten sposób zwiększymy pojemność  $C_s$  do wartości równej  $C_a$  i uzyskamy maksymalną wartość częstotliwości granicznej filtru według równania (45). Wadą tego układu jest niedostateczne dopasowanie oporu  $R_a$  do filtru, znaną z układu dwójnikowego z rys. 16. Wprowadzenie według równania (28) współczynnika  $d$  mniejszego od jedności polepsza nieco średnie dopasowanie, lecz zarazem analogicznie do wzoru (24) zmniejsza częstotliwość graniczną filtru poniżej wartości podanej równaniem (45).

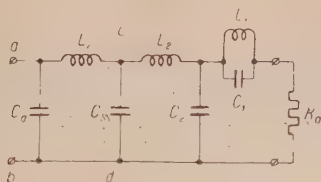
Lepszego dopasowania oporu  $R_a$  do ogniwa podstawowego filtru można dokonać za pomocą półogniwa pochodnego pierwszego rzędu, np. o  $m = 0.6$  (rys. 27) również jednak kosztem zmniejszenia częstotliwości granicznej do wartości

$$\omega_0'' = 3.6 \omega_g \quad (48)$$





za pomocą metod podanych przy rozważaniu układów dwójnikowych (rys. 19 i wynikający z niego rys. 29 oraz rys. 20).



$$\omega_0 = 4 \omega_g, \quad C_a = C_s = \frac{2}{\omega_0 R_a} = \frac{0,5}{\omega_g R_a}.$$

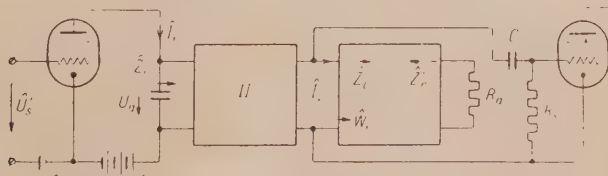
$$L_2 = L_k = 2 \frac{R_a}{\omega_0} = 0,5 \frac{R_a}{\omega_g}, \quad C_2 = \frac{1}{2} C_k + \frac{1}{2} C_m = \frac{1,6}{\omega_0 R_a} = 0,8 C_a.$$

$$L_1 = \frac{1}{2} L_m = 0,6 \frac{R_a}{\omega_0} = 0,3 L_2, \quad C_1 = 2 C'_m = \frac{1,067}{\omega_0 R_a} = 0,53 C_a.$$

Rys. 29. Układ kompensacyjny o 2 ogniwach podstawowych i półogniwie pochodnym pierwszego rzędu ( $m=0,6$ ).

#### 10. OBLICZANIE WZMOCNIENIA I JEGO KĄTA FAZOWEGO UKŁADÓW CZWÓRNIKOWYCH

Czwórnik sprzęgający z rys. 24 podzielimy na następujące części: czwórnik II (rys. 30), który ma na celu rozdział pojemności szkodliwych



Rys. 30. Ogólna postać układu czwórnikowego

$C_a$  i  $C_s$  od siebie i na czwórnik I dopasowujący opór  $R_a$  do czwornika I. Na wejściu czwornika II znajduje się pojemność  $C_a$ , która tworzy łącznie z czwórnikiem II czwórnik niesymetryczny, przedstawiony na rys. 31.

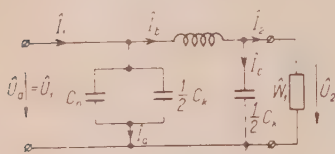
Wzmocnienie zespolone układu

$$\hat{k}_u = -S_a \hat{Z}_0 \frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_a} = -S_a \frac{\hat{U}_2}{\left( \frac{\hat{U}_a}{\hat{Z}_1} \right)} = -S_a \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_1} = -S_a \hat{M}_s, \quad (50)$$

gdzie

$$\hat{M}_s = \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_1}, \quad (51)$$

jest skutecznym oporem wzajemnym niesymetrycznego czwórnik z rys. 31. Wielkość tę można wyznaczyć z teorii czwórników, lecz ze względu na prostotę i niesymetrię rozważanego czwórnik wygodniej jest ją obliczyć z poniższych równań



Rys. 31. Czwórnik dzielący pojemności  $C_a$  i  $C_s$

$$\hat{I}_1 = \hat{I}_a + \hat{I}_b, \quad (52)$$

$$\hat{I}_b = \hat{I}_c + \hat{I}_2, \quad (53)$$

$$\hat{U}_2 = \hat{I}_2 \hat{W}_1, \quad (54)$$

$$\hat{U}_2 = \frac{\hat{I}_c}{j\omega \frac{1}{2} C_k}, \quad (55)$$

$$\hat{U}_1 = \frac{\hat{I}_a}{j\omega C_k}, \quad (56)$$

$$\hat{U}_1 = \hat{I}_b j\omega L_k + \hat{U}_2. \quad (57)$$

Z równań tych otrzymujemy

$$\frac{1}{\hat{M}_s} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_2} = j\omega \frac{C_k}{2} (3 - \omega^2 L_k C_k) + \frac{1}{\hat{W}_1} (1 - \omega^2 L_k C_k). \quad (58)$$

Przy wyborze częstotliwości odniesienia należy zwrócić uwagę na to, że pojemność szkodliwa  $C_p$  zależy nie tylko od pojemności zawartych w czwórniku sprzęgającym (II), lecz również od pojemności zawartych w czwórniku obciążającym (I).

Według rys. 27 oraz 31 pojemność szkodliwa

$$C_p = C_a + C_s = \frac{3+m}{2} C_k, \quad (59)$$

gdzie  $m$  jest parametrem półogniwa wejściowego czwórnik obciążającego (I).

Ponadto z danych przy rys. 25 obliczamy

$$C_k = \frac{2\omega_g}{\omega_0} C_p, \quad (60)$$

gdzie  $\omega_0/2\pi$  jest częstotliwością graniczną układu.

Z równania (58) otrzymujemy w tych założeniach

$$\frac{R_a}{\hat{M}_s} = \frac{R_a}{\hat{W}_1} \left[ 1 - 4 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] + j \frac{\omega}{\omega_0} \left[ 3 - 4 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]. \quad (61)$$

Zatem wzmocnienie napięciowe

$$\hat{k}_u = - \frac{S_a R_a}{\frac{R_a}{\hat{W}_1} \left[ 1 - 4 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] + j \frac{\omega}{\omega_0} \left[ 3 - 4 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]}. \quad (62)$$

Wzór ten posłuży do obliczania wzmocnienia różnych układów czwórnikowych. W najprostszym układzie w postaci filtru o ogniwie podstawowym (rys. 25)  $\hat{W}_1 = R_a$  i  $\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{3} \delta$ . Zatem otrzymamy z równania (62)

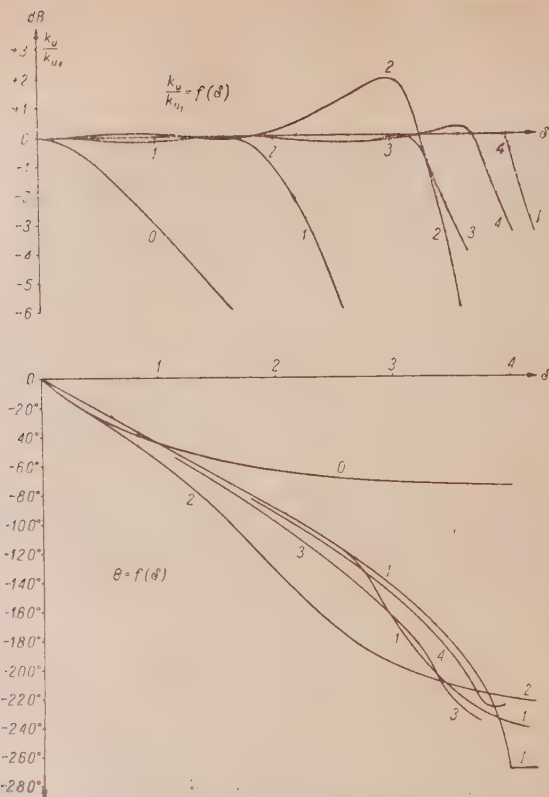
$$\hat{k}_u = - \frac{S_a R_a}{1 - \frac{4}{9} \delta^2 + j \delta \left( 1 - \frac{4}{27} \delta^2 \right)}. \quad (63)$$

Odpowiadające temu równaniu krzywe wzmocnienia i jego względnego kąta fazowego podane są na rys. 32 (jako krzywe 1) w porównaniu z krzywymi 0 dla wzmacniacza oporowego nieskompensowanego.

Jako następny przykład może służyć układ o kompensacji szeregowo-równoległej w postaci filtru o półtora ogniwa podstawowym (rys. 26). Wzmocnienie tego układu

$$\hat{k}_u = - \frac{S_a R_a \left( 1 + j \frac{1}{4} \delta \right)}{1 - \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{3} \delta^4 + j \delta \left( 1 - \frac{1}{8} \delta^2 \right)}. \quad (64)$$

zilustrowane jest na rys. 32 krzywymi 2. Krzywa wzmocnienia wykazuje tutaj silne maksimum (około - 2 dB), które można wytłumaczyć niedopasowaniem półogniwa podstawowego do oporu  $R_a$  (patrz rys. 11 oraz rys. 23 — krzywe dla  $p=3$ ). Należy zwrócić również uwagę na zmianę pochodnej względnego wzmocnienia w pobliżu tego maksimum. Ze względu na maksymalną wartość częstotliwości granicznej według wzoru (45) otrzymujemy znaczne rozszerzenie pasma częstotliwości (prawie do  $\delta = 3,3$ ).



0 — wzmacniacz oporowy nieskompensowany

1 — wzmacniacz oporowy skompensowany równoległą indukcyjnością

$$\left( \frac{C_s}{C_p} = 0,33, \omega_g^2 LC_a = 0,445 \right) \text{ (rys. 25).}$$

2 — wzmacniacz oporowy o kompensacji szeregowo-równoległej w postaci filtru o półtora ogniwa podstawowym

$$\left( \frac{C_s}{C_p} = 0,5, Q_g = 0,25, \omega_g^2 L_2 C_a = 0,25 \right) \text{ (rys. 26).}$$

3 — wzmacniacz oporowy o kompensacji czwórnikowej ogniwem podstawowym i półogniwem pochodnym pierwszego rzędu ( $m=0,6$ ).

$$\left( \frac{C_s}{C_p} = 0,445, \frac{C_3}{C_p} = 0,296, Q_g = 0,166, \omega_g^2 L_2 C_s = 0,31 \right) \text{ (rys. 27).}$$

4 — wzmacniacz oporowy o kompensacji czwórnikowej trzema półogniwami podstawowymi i półogniwem pochodnym pierwszego rzędu (rys. 28).

5 — wzmacniacz oporowy o kompensacji czwórnikowej dwoma ogniwami podstawowymi i półogniwem pochodnym pierwszego rzędu (rys. 29).

I — wzmacniacz oporowy o idealnej kompensacji czwórnikowej.

Rys. 32. Wzmocnienie i jego względny kąt fazowy w funkcji zredukowanej częstotliwości  $\delta$ .



Mniejsze maksimum wzmocnienia wykazuje krzywa 3 podana na rys. 32, co wynika z lepszego dopasowania oporu obciążenia  $R_a$  do ogniwa podstawowego ( $B$ ) za pomocą półogniwa pochodnego pierwszego rzędu (rys. 27). Szerokość pasma częstotliwości jednak nie wzrasta, gdyż według wzoru (48) częstotliwość graniczna filtru jest mniejsza od częstotliwości granicznej dla krzywej 2.

Jak wiadomo z rozdziału 9, pełne wykorzystanie pasma częstotliwości i stosunkowo dobre dopasowanie można otrzymać w układzie z rys. 28. Charakterystykę wzmocnienia tego układu podaje krzywa 4 na rys. 32; maksimum wzmocnienia nie przekraczające 0,2 dB wypada na częstotliwości zredukowanej około 3,5, czyli przy wartości praktycznie bardzo zbliżonej do 4, odpowiadającej częstotliwości granicznej układu teoretycznego.

Układ z rys. 28, jak wiadomo z rozważań podanych w rozdziale 6, jest jednak czuły na pojemności bocznikujące opór  $R_a$ ; z tego powodu stosuje się raczej układ z rys. 29. Odpowiadają mu krzywe 5 na rys. 32.

## 11. WYRÓWNYWANIE CHARAKTERYSTYK

Z krzywych podanych na rys. 32 widać, że w pewnych układach często stosowanych w praktyce (np. układ z rys. 26) charakterystyki wzmocnienia w funkcji częstotliwości przybierają wartości maksymalne, przekraczające wartości dopuszczalne dla jednego stopnia. Wynika to zwykle z braku dopasowania między ogniwnem podstawowym od strony  $T$  a oporem rzeczywistym obciążenia  $R_a$ .

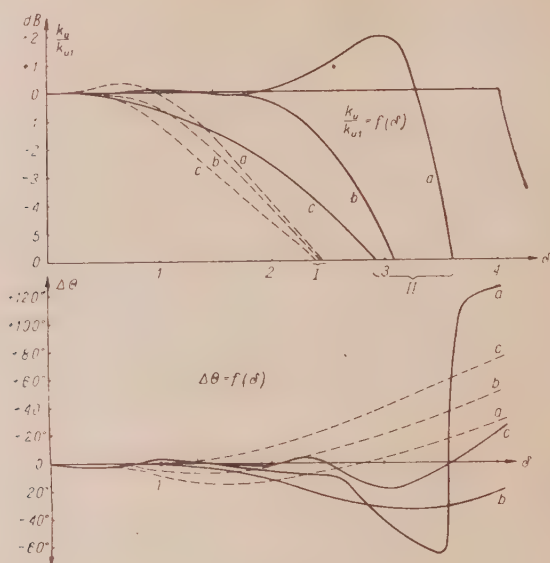
Do najczęściej stosowanych układów w praktyce należą: dwójnikowy z rys. 16, czyli tak zwany układ o kompensacji szeregową indukcyjnością oraz już wspomniany układ czwórnikowy o kompensacji szeregowo-równoległej z rys. 26. Charakterystyki wzmocnienia  $k_u$  i przyrostu kąta fazowego

$$\Delta\theta = \theta - \left| \frac{d\theta}{d\delta} \right|_{\delta=0} \delta \quad (35)$$

w funkcji częstotliwości oznaczone literą  $a$  na rys. 33 wykazują wartości, które mogą być niedopuszczalne w szeregu zastosowań.

Korzystając z racjonalnej struktury układu kompensującego, opartej na teorii filtrów elektrycznych, można dobrać elementy filtru w taki sposób, aby charakterystyka wzmocnienia w funkcji częstotliwości była możliwie płaska lub też kąt fazowy wzmocnienia wzrastał liniowo z częstotliwością.

Dokonać tego można, rozwijając na szereg Taylora moduł wzmocnienia i przyrównując do zera współczynniki tego szeregu, przy wyrazach za-



Krzywe przerywane

Ia :  $Qg = 0,5$

Ib :  $Qg = 0,414$

Ic :  $Qg = 0,322$

Krzywe ciągłe

IIa :  $Qg = 0,25$

IIb :  $Qg = 0,14$

IIc :  $Qg = 0,10$

$d = 0,25$

$d = 0,35$

$d = 0,33$

$n = 0,25$

$n = 0,4$

$n = 0,28$

Rys. 33. Charakterystyki wzmocnienia i przyrostu kąta fazowego I układu dwójnikowego (o kompensacji szeregową indukcyjnością) — linie ciągłe — i II układu czwórnikowego (o kompensacji szeregowo-równoległej) — linie przerywane — dla warunków pracy obliczonych: a) metodą filtrową, b) metodą szeregu potęgowego w przypadku najbardziej równej charakterystyki wzmocnienia, c) najmniejszego przyrostu kąta fazowego.

leżnych od częstotliwości otrzymuje się wzmocnienie niezależne od częstotliwości [3]. Z równań otrzymanych przez przyrównanie do zera współczynników szeregu otrzymujemy wartości elementów układu. Można też

przedstawić kwadrat względnego wzmocnienia w postaci ilorazu dwóch wielomianów

$$\left( \frac{k_u}{k_{u1}} \right)^2 = \frac{1 + a_1 f + a_2 f^2 + a_3 f^3 + \dots + a_n f^n}{1 + b_1 f + b_2 f^2 + b_3 f^3 + \dots + b_n f^n} \quad (66)$$

Przyrównując do siebie współczynniki przy jednakowych potęgach częstotliwości uzyskamy z równania (66) stałe wzmocnienie, a z ułożonych we wskazany sposób równań

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3 \dots a_n = b_n \quad (67)$$

wartości elementów kompensujących układu.

W podobny sposób można wyznaczyć warunki liniowego wzrostu kąta fazowego przedstawiając jako stosunek dwóch wielomianów pochodną kąta fazowego względem częstotliwości i przyrównując ją do wartości stałej  $A$

$$\frac{d\theta}{df} = \frac{c_0 + c_1 f + c_2 f^2 + c_3 f^3 + \dots + c_n f^n}{d_0 + d_1 f + d_2 f^2 + d_3 f^3 + \dots + d_n f^n} = A. \quad (68)$$

Pochodna ta winna mieć wartość stałą, co pozwala na wyznaczenie elementów układu przez przyrównanie do siebie odpowiednich współczynników wielomianów z uwzględnieniem stałej  $A$

$$c_0 = d_0 A, \quad c_1 = d_1 A, \quad \dots \quad c_n = d_n A. \quad (69)$$

Zastosowanie powyższych metod do wspomnianych wyżej przykładów daje na rys. 33 krzywe b dla przykładu najbardziej płaskiej charakterystyki wzmocnienia i krzywe c dla przypadku liniowego wzrostu kąta fazowego.

## 12. WPŁYW STRAT W ELEMENTACH UKŁADÓW KOMPENSUJĄCYCH

W dotychczasowych rozważaniach zakładano milcząco, że elementy układów kompensujących są bezstratne. W rzeczywistości elementy, jak cewki i kondensatory posiadają straty, które wyrażają się w postaci schematowej jako opory szeregowie bądź równoległe. Istnienie tych dodatkowych elementów powoduje, że w praktyce uzyskuje się wyniki odbiegające w pewnym stopniu od teorii przedstawionej w powyższej pracy. Różnice te jednak nie są wielkie głównie ze względu na to, że pojemności rozproszone kondensatorów, występujące w układach kompensujących,

posiadają niewielkie straty. Również indukcyjności cewek o małej ilości zwojów stosowane w układach kompensujących dają się z łatwością wykonać z małymi stratami.

Wpływ strat wyrażający się zwężeniem pasma częstotliwości jest zwykle na ogół mniejszy od wpływu niedokładnego dobrania elementów układu kompensującego, co stanowi największą trudność w realizacji wzmacniaczy szerokopasmowych.

*Praca referowana na posiedzeniu Wydziału VI  
Towarzystwa Naukowego Warszawskiego  
dn. 25. 4. 1951 r.*

#### WYKAZ LITERATURY

- [1] Wheeler — Wide-band amplifiers for television — PIRE, 1939, July, s. 429.
- [2] Zobel — Extensions to the theory and design of electric wave filters — B. S. T. J., 1931, s. 284.
- [3] Braude — O koryrekcji czastotnych i faznych charakteristik usilitelnych ustroistw — *Ż. T. F.*, s. 1714 i s. 1818.
- [4] Tellegen i Verbeck — Patent angielski nr 469791.
- [5] Bode — Network analysis and feedback design — New York 1945, względnie tłumaczenie na język rosyjski.
- [6] Nowicki — Podstawy techniki przenoszenia przewodowego — 4. Teoria czwórników, s. 115.
- [7] Katajew — Osnovy tielewidienia.
- [8] Belewitch — Tchebyshev filters and amplifier networks — *Wireless Engineer*, 1952, nr 4, s. 106.

A. СМОЛИНСКИ

#### НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ К ШИРОКОПОЛОСНЫМ УСИЛИТЕЛЯМ НИЗКИХ ЧАСТОТ

#### Резюме

Широкополосные усилители низких частот, применяемые в телевидении и в измерительной технике построены на основах реостатных усилителей (рис. 1) с компенсацией вредной ёмкости системы (рис. 2), при помощи реактивного сопротивления, содержащего сопротивление нагрузки  $R_a$  (рис. 4 и 5). Реактивное компенсационное сопротивление подбирается таким образом, чтобы равнодействующая нагрузка лампы была действительная (рис. 14), что определяет характеристику реактивного сопротивления. Требуемую характеристику легче всего получить, строя на вредной ёмкости фильтр низких частот (рис. 6), которого нагрузкой является действительное сопротивление  $R_a$  (рис. 12). Условием правильной работы лампы фильтра с лампой является действительное входное сопротивление фильтра (рис. 7), что обуславливает работу фильтра в области полосы пропускания. Увеличенная входная ёмкость фильтра



компенсирует (выравнивает) характеристику его входного сопротивления (рис. 13 и 14). Правильная (корректная) форма характеристики входного сопротивления фильтра (рис. 7) получается только в случае нагрузки фильтра его характеристическим сопротивлением, изменяющимся с частотой (рис. 7). Так как в действительности сопротивление нагрузки постоянно и равно  $R_a$ , следовательно для подбора этого сопротивления к зажимам фильтра надо приключить дополнительное выравнивающее полу-звено (рис. 12) основного типа (рис. 16) производного первого разряда (рис. 17), или второго разряда (рис. 20). Чем лучше подобрано сопротивление  $R_a$  к выходным зажимам фильтра, тем меньше колебания характеристик входного сопротивления, а следовательно усиления (рис. 22).

Как результат этих мер мы получаем двухполюсную компенсационную систему (рис. 4). Эта система позволяет полосу частот расширить вдвойне в сравнении с реостатным усилителем в предельном случае идеального подбора.

Из вышеприведенных соображений следует, что двухполюсная (двойственная) фильтровая система в принципе состоит из 4-х частей (рис. 13): из дополнительной ёмкости  $C_n(A)$ , основного полу-звена  $B$ , выравнивающего полу-звена  $C$  и анодного сопротивления  $D$ . В зависимости от подбора мы получаем всё более и более сложные двухполюсные выравнивающие системы (рис. 16—20).

Расчёт усиления и его фазового угла для двухполюсных компенсационных систем производится при помощи формул, известных из теории четырехполюсников, исходя из входного сопротивления фильтра (32) и (39). По этой зависимости рассчитываем сопротивление нагрузки лампы (31) и как результат усиление и его фазовый угол. Этот способ расчёта удачно применяется в случае сложных систем, для простых же систем гораздо проще производить расчёты по известному методу суммирования сопротивлений.

Результаты расчётов собранные в таблице (рис. 22) указывают, что система по рис. 18, несмотря на свою простоту дает результаты близкие к идеальной кривой, причем использование теоретической полосы составляет ок. 95%. Применение больших приближений не является целесообразным, ввиду трудности подбора элементов производных фильтров высших степеней.

Разделение вредной ёмкости на выходную возбуждающей лампы и входную возбуждаемой лампы, и постройка основного звена фильтра на этих ёмкостях наряду с введением нагрузки, имеющей также вид выше описанного фильтра (рис. 24) позволяет полосу частот еще расширить вдвое.

Таким образом получается четырёхполюсная компенсационная система в расширенном виде (рис. 28), состоящая из дополнительной ёмкости  $C_n(A)$ , основного звена  $B$ , разделяющего вредную ёмкость на анодную и сеточную часть, следующего затем основного полу-звена ( $B$ ), отделяющего предшествующее основное звено от выравнивающего полу-звена ( $C$ ) и из сопротивления нагрузки  $R_a$ . В зависимости от подбора получаются разного рода четырёхполюсники сопрягающие системы (рис. 25 — 29).

Комплексное усиление системы рассчитывается при помощи эффективного взаимного сопротивления (50) и (51), которое обыкновенно определяется из системы уравнений токов и напряжений по формулам (58) и (61), из которых выводят общую формулу комплексного усиления усилителя, с четырёхполюсной компенсацией (62). Подсчитанные по этой формуле характеристики усиления и его относительного фазового угла сопоставлены на рис. 22; из них видно, что кривые относящиеся к системе на рис. 28 значительно приближаются к идеальным характеристикам. Следует обратить внимание, что предел относительного фазового угла четырёх-

полюсных систем равен  $-270^\circ$ , что не позволяет применять компенсацию этого рода в системах с обратной связью.

Так как в практике применяется небольшое количество компенсационных элементов, то не достигаются предельные величины ширины полосы. Вследствие отсутствия подбора, характеристики усиления становятся неравномерными. Для получения возможно равномерных характеристик системы усиления с рациональной конструкцией компенсационной системы, основанной на теории фильтров, применяется разложение модуля усиления в ряд и приравнивание к нулю коэффициентов при членах ряда зависящих от частоты. По полученным таким образом уравнениям рассчитываются величины элементов системы. Подобным образом можно определить условия линейного увеличения относительного фазового угла при увеличении частоты, представляя его производную в форме частного двух многочленов и приравнивая его к постоянной величине.

На рис. 33 представлены характеристики усиления и его фазового угла рассчитанные по описанному методу, при чём кривые *b* относятся к случаю самой плоской характеристики усиления, а кривые *c* к случаю линейного увеличения фазового угла. Наконец следует заметить, что влияние потерь в фильтровых элементах проявляется в виде некоторого сужения полосы частот и менее крутой формы кривых.

A. SMOLIŃSKI

## SOME APPLICATIONS OF THE THEORY OF ELECTRIC FILTERS FOR WIDE-BAND LOW-PASS AMPLIFIERS

### Summary

Wide-band low-pass amplifiers, used in television and in measurements, are built on the basis of resistance amplifiers (Fig. 1) with the parasitic capacity of the circuit (Fig. 2) compensated by means of the impedance, which contains the loading resistance  $R_n$  (Fig. 4 and 5). The compensating impedance should be chosen in such a way, as to make the resultant valve loading resistive (Fig. 14), from which follows a special shape of the impedance graph. The easiest way of getting the required impedance graph is to by-pass the parasitic capacity by means of a low-pass filter (Fig. 6), loaded by a resistance  $R_n$  (Fig. 12). The proper cooperation between the filter and the valve relies on the resistive input impedance (Fig. 7), which requires the filter to work in the by-pass range. The increased input capacity of the filter compensates the characteristics of its input impedance (Fig. 13 and 14). The right shape of the input impedance characteristic is obtained only when the filter is loaded with its characteristic impedance variable with the frequency (Fig. 7). As in practice the loading impedance is constant and equal  $R_n$ , in order to match this impedance to the output terminals of the filter, one has to connect an additional adjusting half-element (Fig. 12) of a fundamental type (Fig. 16), a derivative of the first order (Fig. 17—19) or of the second order (Fig. 20). The better the matching of the resistance  $R_n$  to the output terminals of the filter, the smaller the oscillations of the input impedance characteristic and, consequently, of the amplification (Fig. 22).

As a result we get a two-terminal equivalent compensating circuit (Fig. 4). This circuit allows a double width frequency band as compared with an impedance amplifier working in an extreme case of perfect matching.

Out of the above considerations it follows, that the two-terminal equivalent filter circuit consists of four main parts (Fig. 13): the additional capacity  $C_n(A)$ , the fundamental halfelement (B), the matching halfelement (C) and the plate resistance (D). According to the kind of matching we get more and more complicated two-terminal matching circuits (Fig. 16—20).

The calculation of amplification and its phase angle of the two-terminal equivalent compensating circuits is done by means of the formulae known from the theory of four-terminal equivalent circuits, starting from the input impedance of the filter (32 and 39). From this relation we may calculate the loading resistance of the valve (31) and finally the amplification and its phase angle. This method of amplification calculation is applied with good results in case of more complicated circuits: more simple circuits are easier calculated by the known method of impedance summation.

The calculation results of the group presented in Fig. 22 show, that the circuit demonstrated in Fig. 18, in spite of its simplicity, gives results approaching the ideal curve and exploiting 95% of the theoretical band width. The application of a further approximation usually does not pay, because of the difficulties of selecting the elements of the derivative filters of a higher order.

The division of the parasitic capacity into the output capacity of the exciting valve and the input capacity of the excited valve and the construction of the fundamental element of the filter on these capacities, together with the introduction of the load also as the above described filter (Fig. 24) allows a further doubling of the frequency band width. As a result a four-terminal equivalent circuit is obtained, which comprises in its developed form (Fig. 28) the additional capacity  $C_n(A)$ , the fundamental element B, dividing the parasitic capacity into the anode and the grid part, a further fundamental halfelement (B), separating the former fundamental element from the adjusting halfelement (C) and the loading resistance  $R_a$ . According to the method of adjustment different types of four-terminal equivalent coupling circuits are obtained (Fig. 25—29).

The complex amplification of the system is calculated by means of the mutual impedance (50—51), which is usually determined from a set of voltage and current equations in the form given by the formulae (58—61), out of which the general formula for the complex amplification of the amplifier with a four-terminal equivalent circuit compensation (62) is derived. The characteristic of amplification and its relative phase-angle, calculated by this formula, are shown in Fig. 32. It will be seen, that these curves, referring to the system shown in Fig. 28, are closely approaching the ideal characteristics. It should be noticed, that the relative phase-angle of the four-terminal equivalent circuits in the limits is  $-270^\circ$ , which makes the use of this type of compensation impossible in circuits with negative feedback.

As in practice only few compensating elements are used, the extreme values of the band-width are not reached. Due to the lack of matching the amplification characteristic cease to be uniform. In order to get reasonably uniform characteristics of the amplifying system with the rational structure of the compensating system based on the filter theory, the amplification modulus is expanded into a series and its coefficients by the expressions depending on frequency are made equal to zero. The equations obtained give the values of the circuit elements. Similarly, the conditions of the linear increase of the relative angle with

frequency can be determined, by transforming its derivative into a product of two polynomials and equating it to a constant. Fig. 33 shows the characteristics of the amplification and its phase-angle calculated in this way. Curves *b* refer to the flattest amplification characteristic and curves *c* to the case of linear increase of the phase-angle. Finally it should be added that the filter element losses cause a certain decrease of the frequency band width and smooth the wave shape.



621.3.015.3

J. L. JAKUBOWSKI

## Kryteria eliminacji oporności falowej przy odbiciach wielokrotnych

*Rękopis dostarczono 18. 6. 1953*

**Streszczenie.** Uwagę elektrotechników od dawna zwracał przypadek, w którym — skutkiem wielokrotnych odbić fali wędrownej od krańców krótkiego odcinka linii — odcinek ten gra rolę pojemności  $C$  lub indukcyjności  $L$  (patrz np. rys. 1). Wzięcie do obliczeń stałej skupionej  $C$  lub  $L$  zamiast oporności falowej  $Z$  autor nazywa eliminacją oporności falowej. W pracy poniższej zostają ustalone na podstawie analizy szeregu przypadków dwa podstawowe kryteria eliminacji. Ponadto zostaje rozpatrzona celowość stosowania bardziej skomplikowanych układów zastępczych typu  $nT$  i  $nT$ , złożonych z  $C$  i  $L$ .

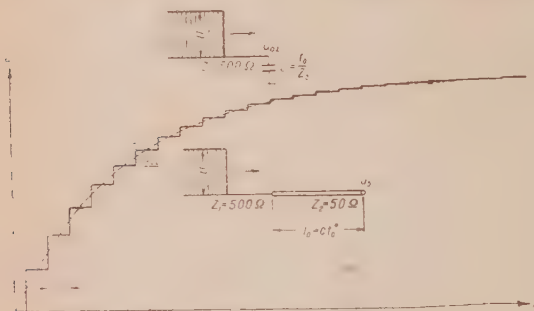
Przy sposobności poddano analizie przypadek, w którym skutkiem wielokrotnych odbić zjawiają się drgania, oraz przypadek wyładowania kondensatora przez linię zwartą na końcu. Ponadto wykazano, iż istnieje obwód, w którym eliminacja jest zupełna (rys. 27), to znaczy, że zamiast odcinka linii można wziąć zwarcie.

### 1. WSTĘP

Fale wędrowne, występujące w energetycznych liniach przesyłowych, można z dostatecznym przybliżeniem uważać za nietłumione, jeśli nie występuje zjawisko ulotu. Linie traktuje się wtedy jako praktycznie nieodkształcające, to znaczy przyjmuje się, iż ich upływność i oporność czynna są równe zeru. Obliczenie przebiegów falowych przy tych założeniach jest bardzo uproszczone. Wyjątek stanowi przypadek wielokrotnych odbić. Mianowicie gdy fala dostanie się na odcinek linii mającej inną oporność falową niż linie sąsiednie, zostaje na tym odcinku jakby uwięziona. Biega ona tam i z powrotem ulegając odbiciom od krańców odcinka. Zachodzi to na przykład wtedy, gdy między liniami napowietrznymi znajduje się krótki odcinek kabla, lub też wtedy, gdy fala pochodzenia piorunowego przejdzie z przewodu ogromowego na słup. Jak wiadomo, przebiegi czasowe napięć i prądów w dowolnym punkcie takiego odcinka linii są w pewnych przypadkach bardzo zbliżone do przebiegów, jakie by zachodziły przy zastąpieniu odcinka linii jego pojemnością lub

indukcyjnością. Takie zastąpienie elementu o stałych rozłożonych przez stałe skupione nosi właśnie nazwę eliminacji oporności falowej.

Najprostszy przypadek eliminacji pokazuje rys. 1. Fala prostokątna o napięciu  $U$  przechodzi z linii o oporności falowej  $Z_1 = 500 \Omega$  na odcinek kabla o oporności falowej  $Z_2 = 50 \Omega$ . Fala ta odbija się od końca kabla, wraca do początku, tu znów odbija się itd. Jak widać, napięcie  $u_0$  na



Rys. 1. Napięcie  $u_0$  na końcu kabla ( $Z_2 = 50 \Omega$ ) przy nadejściu fali prostokątnej z linii napowietrznej ( $Z_1 = 500 \Omega$ ) w układzie z rys. dolnego.

Napięcie  $u_{0z}$  na kondensatorze  $C$ , zastępującym kabel w układzie zastępczym wg rys. górnego.

końcu odcinka kabla ma postać krzywej schodkowej, zbliżonej do przebiegu gładkiego  $u_{0z}$  występującego wtedy, gdy zamiast kabla damy kondensator o tej samej pojemności co kabel.

Na zjawisko wielokrotnych odbić zwrócił uwagę R. Rüdenberg [15], nie przeprowadzając jednak analogii z obwodami o stałych skupionych. Po tej samej drodze poszli H. G. Brinton, F. H. Buller i W.

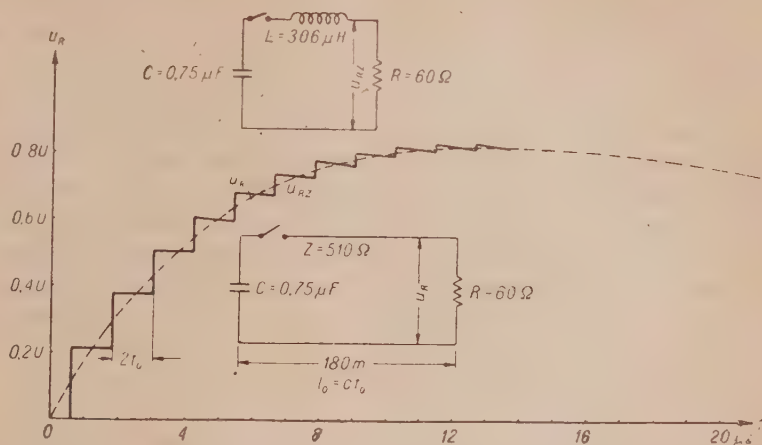
I. Rudge [5]. Porównanie takie znajdujemy między innymi u L. V. Bewleya [2], L. E. Maszkilleisona [14], M. W. Kostienki [12] i J. Biermannsa [4]. Zastosowanie praktyczne eliminacji oporności falowej jako metody obliczeniowej rozpatruje L. I. Sirotinskij [16] — dla uderzenia pioruna w słup linii energetycznej, K. Berger [1] — dla uderzenia pioruna w przewód roboczy w małej odległości od odgromnika, wreszcie G. Frühauf [6] oraz I. Herlitz i N. Knudsen [8] — dla ochrony stacji przez kabel — i inni.

Najbardziej wnikliwą analizę rozpatrywanego zagadnienia dał P. Hammarlund [7], omawiając metody określania napięcia powrotnego przy wyładowaniach linii. Jego rozważania ograniczają się do fal sinusoidalnych.

Definicja eliminacji oporności falowej nie zawsze jest dostatecznie jasno sformułowana. Np. Bewley [2], rozpatrując wyładowanie kondensatora przez krótki odcinek linii, zwarty na końcu opornością (rys. 2)<sup>1</sup>, pisze: „Kolejne odbicia stopniowo zmniejszają wpływ oporności falowej linii i, począwszy od pewnej chwili, napięcie na oporze  $R$  maleje według

<sup>1</sup> Na rys. 2, u dołu pokazany jest obwód rzeczywisty, w którym fale biegają (po zamknięciu obwodu) od kondensatora  $C$  do opornika  $R$ . Napięcie  $u_R$  na  $R$  ma postać krzywej schodkowej. U góry rysunku pokazany jest układ zastępczy z indukcyjnością  $L$  zamiast linii. Napięcie  $u_{Rz}$  na  $R$  w tym układzie jest krzywą gładką.

wzoru  $u = Ue^{-\frac{t}{RC}}$ . Eliminacją oporności falowej można się posługiwać w tym ujęciu po czasie teoretycznie równym nieskończoności, a praktycz-



Rys. 2. Napięcie  $u_R$  na oporze  $R$ , znajdującym się na krańcu linii  $Z = 510 \Omega$ , wg układu z rys. dolnego.

Napięcie  $u_{RZ}$  na oporze  $R$  w schemacie zastępczym wg rys. górnego, w którym długa linia jest zastąpiona przez indukcyjność  $L$ .

nie odpowiadającym większej liczbie odbić fal. Inaczej sformułowanie to brzmi: po odpowiednio dużej liczbie odbić panuje takie napięcie, jakby w ogóle nie było linii o oporności falowej  $Z$  lub jakby ta linia stanowiła wprost zwarcie. Jest to ograniczenie zakresu pojęcia eliminacji. Można się o tym przekonać również na przypadku rozpatrywanym przez Bewleya. Mianowicie także dla małych czasów (rys. 2) napięcie występujące rzeczywiście jest bardzo zbliżone do napięcia, jakie by panowało przy zastąpieniu odcinka linii przez jego indukcyjność  $L$ . Jak pokazują przeliczenia, środkowa między górną i dolną obwiednią rzeczywistego przebiegu napięciowego prawie dokładnie odpowiada wyładowaniu obwodu  $CLR$ , zachodzącemu według zależności:

$$u_R = 1,35 U (e^{-\frac{t}{38,60}} - e^{-\frac{t}{5,85}}).$$

Zresztą, zgodnie ze spostrzeżeniami Bewleya, dla dużych czasów wzór ten mało odbiega od wzoru dla układu  $CR$  o postaci:

$$u_R = Ue^{-\frac{t}{45}} \quad (\text{czasy w } \mu\text{s})^2.$$

<sup>2</sup> Na omawianą różnicę definicji autor zwrócił uwagę w r. 1936 [10] i [11].

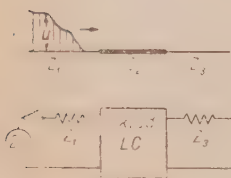
Jak będzie pokazane w dalszym ciągu niniejszej pracy, istnieje przypadek, w którym można stosować zupełną eliminację oporności falowej, to znaczy zastąpienie odcinka linii przez zwarcie. Przypadek ten nie ma jednak nic wspólnego ze sformułowaniem Bewleya, które odnosi się do warunków, w których eliminacja prowadzi do zastąpienia linii przez indukcyjność.

Posługiwanie się eliminacją oporności falowej jest, ściśle biorąc, tylko pewną odmianą metody zastępowania odcinków długich linii przez stałe skupienie. Wiadomo, że rezygnując z dokładności każdą linię można zastąpić przez układ  $II$  lub  $T$  albo przez połączenie kilku takich układów, złożonych ze skupionych indukcyjności i pojemności, równych łącznie indukcyjności lub odpowiednio pojemności danego odcinka linii. W rozpatrywanym wyżej przypadku Bewleya linię zastępuje się właściwie pojedynczym układem  $II$ , pomijając pojemności, których wpływ jest znikomy. Jedną z nich, równą  $0.0006 \mu F$ , dodaje się do pojemności  $C = 0.75 \mu F$  i praktycznie biorąc nie zwiększa jej; druga — o tej samej wartości — jest prawie zwarta przez  $R = 60 \Omega$ .

Zagadnienie eliminacji oporności falowej sprowadza się więc, ogólnie biorąc, do zastąpienia linii przez układy  $II$  albo  $T$  (lub  $X$ ). Zastąpienie to daje tylko wtedy przy obliczeniach ułatwienie w stosunku do rozpatrywania przebiegów falowych, gdy układ zastępczy jest bardzo prosty. Już przeliczenie pojedynczych układów  $II$  i  $T$  jest często bardzo żmudne, nie mówiąc o układach złożonych z kilku elementów typu  $II$  lub  $T$ . Toteż w praktyce ograniczamy się do przypadków, w których odcinek linii można zastąpić bądź pojemnością, bądź indukcyjnością. Niniejsza praca zajmuje się właśnie tak pojętą eliminacją, a w szczególności kryteriami, kiedy ją można stosować. Oczywiście zagadnienie to nie jest istotne

w przypadku posługiwania się analizatorami, kiedy to liczba układów  $II$  lub  $T$  zależna jest tylko od liczby odpowiednich elementów analizatora.

Kryteria stosowania eliminacji oporności falowej były ustalane w stosunku do poszczególnych przypadków. Najciekawsze ujęcie daje K. Berger [1], wprowadzając kryterium energetyczne. Stwierdza on, że odcinek linii gra rolę indukcyjności lub pojemności zależnie od tego, czy w przebiegu przewożą energia pola magnetycznego linii  $Li^2/2$ , czy pola elektrycznego  $Cu^2/2$ . Kryterium takie jest niewątpliwie bardzo cenne, jednak jest



Ryc. 3 Układ 3 linii i odpowiadający mu uogólniony obwód Petersena.

ono zbyt mało szczegółowe, gdyż nie uwidacznia wpływu takich czynników, jak współczynnik odbicia oraz kształt fali nadchodzącej. Kryteriom szczegółowym poświęcona jest niniejsza praca.

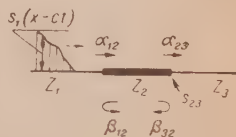


Jak wynika z powyższych rozważań, przy rozpatrywaniu eliminacji oporności falowej posługujemy się układami zastępczymi. Układy te rozpatruje się zwykle jako część tak zwanego obwodu Petersena, w którym zamiast oporności falowych występują oporności czynne. Obwód Petersena stosuje się zasadniczo do napięć i prądów panujących w punkcie połączenia dwóch linii nieograniczonej długości. Ponieważ w takim punkcie mogą być włączone elementy przedstawiające dowolne stałe skupione lub ich kombinacje, obwód Petersena można uogólnić. Taki uogólniony obwód Petersena przedstawia rys. 3. W obwodzie uogólnionym odcinek linii  $Z_2$  jest zastąpiony przez pewną kombinację stałych skupionych  $LC$ . Gdy zamiast linii  $Z_1$  przyłączone jest wprost źródło napięcia  $u$ , siłę elektromotoryczną układu stanowi  $u$ , a nie  $2u$ . W szczególnym przypadku układ zastępczy dla odcinka  $Z_2$  stanowić może  $C$  lub  $L$ .

## 2. UKŁADY 3-LINIOWE

Punkt wyjścia naszych rozważań stanowią znane zależności dla przypadku odcinka linii o skończonej długości i o oporności falowej  $Z_2$ , włączonego między linie o nieskończonej długości, mające oporności  $Z_1$  i  $Z_3$  (rys. 4). Układ ten będzie nazywany 3-liniowym. Dla ujednostajnienia rozważań obliczane będą napięcia lub prądy zawsze na końcu odcinka  $Z_2$ , a więc napięcia i prądy panujące jednocześnie na początku linii  $Z_3$ . Na razie nie będziemy rozróżniali, czy mamy do czynienia z prądem, czy z napięciem, a zastąpimy je pewną funkcją  $s$ , która może być później uznana za prąd lub napięcie.

Opierając się na rys. 4 i uwzględniając, że  $\alpha_{12}$  i  $\alpha_{23}$  oznaczają współczynniki przejścia fali z  $Z_1$  na  $Z_2$  oraz z  $Z_2$  na  $Z_3$ , zaś  $\beta_{12}$  i  $\beta_{32}$  — współczynniki odbicia fali w  $Z_1$  od  $Z_1$  i  $Z_3$ , otrzymamy dla fali nadchodzącej  $s_1(x-ct)$  wartość  $s_{23}$  (na granicy  $Z_2$  i  $Z_3$ ) równą:



Rys. 4. Oznaczenia współczynników przejścia ( $\alpha_{12}$  i  $\alpha_{23}$ ) oraz współczynników odbicia ( $\beta_{12}$  i  $\beta_{32}$ ) dla układu 3-liniowego.

$$s_{23}(t) = s_1(t) \cdot \alpha_{12} \alpha_{23} \mathbf{1}_0 + s_1(t - 2t_0) \cdot \alpha_{12} \alpha_{23} \beta \mathbf{1}_{2t_0} + \\ + s_1(t - 4t_0) \cdot \alpha_{12} \alpha_{23} \beta^2 \mathbf{1}_{4t_0} + \dots + s_1(t - 2nt_0) \cdot \alpha_{12} \alpha_{23} \beta^n \mathbf{1}_{2nt_0}. \quad (1)$$

We wzorze tym występuje całkowity współczynnik odbicia  $\beta = \beta_{12} \beta_{32}$ , zaś  $t_0$  oznacza czas przebiegu fali przez odcinek  $Z_2$  w jednym kierunku. Czas  $t$  liczy się od chwili pierwszego trafienia fali w punkt 2-3, tj. punkt graniczny między  $Z_2$  i  $Z_3$ , przy czym  $\mathbf{1}_{2nt_0}$  oznacza, że dla danego

wyrazu czas liczy się od chwili  $2nt_0$ , a dla  $t < 2nt_0$  wyraz jest równy zeru. Wielkość  $n$  jest to wykładnik potęgi  $\beta$ ; liczba wyrazów szeregu jest  $n+1$ .

Szereg (1) można zsumować znając funkcję  $s_1(t)$ . W szczególnych przypadkach może to być np. suma postępu geometrycznego, arytmetycznego lub arytmetyczno-geometrycznego.

Sumę szeregu (1) określimy dla trzech typowych przebiegów fal nadchodzących: prostokątnego, liniowego i wykładniczego, wychodząc z założenia, że P. Hammarlund [7] dostatecznie zbadał już przebiegi sinusoidalne.

Dla fali nadchodzącej prostokątnej  $s_1=1$ :

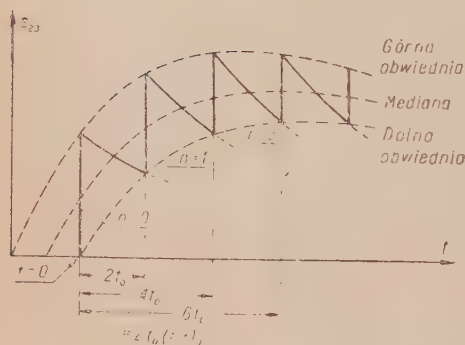
$$s_{23} = \frac{a_{12}a_{23}}{\beta-1} \left( e^{-\frac{t}{2t_0} \ln \frac{1}{\beta}} - 1 \right). \quad (2)$$

Dla fali nadchodzącej liniowej  $s_1=at$ :

$$s_{23} = \frac{a_{12}a_{23}}{1-\beta} \left[ at + \frac{2\beta}{1-\beta} at_0 \left( e^{-\frac{t}{2t_0} \ln \frac{1}{\beta}} - 1 \right) \right]. \quad (3)$$

Dla fali nadchodzącej wykładniczej  $s_1=e^{-\frac{t}{\tau}}$ :

$$s_{23} = \frac{a_{12}a_{23}}{e^{\frac{1}{\tau}} \cdot \beta - 1} \left( e^{-\frac{t}{2t_0} \ln \frac{1}{\beta}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \quad (4)$$



Rys. 5. Przebieg napięcia lub odpowiednio prądu ( $s_{23}$ ) w punkcie granicznym oporności falowych  $Z_2$  i  $Z_3$  (rys. 4). Przypadek fali nadchodzącej wykładniczej. Na rysunku oznaczono górną i dolną obwiednię oraz ich medianę.

fali ( $n=n$ ) punkt  $t = 2t_0(n+1)$ . Jak wynika z powyższego, krzywe (2) i (4) stanowią dolne obwiednie krzywych rzeczywistych, a krzywa (3)

Przy wyprowadzaniu tych wzorów przyjęto, że  $2t_0(n+1) = t$ , to znaczy wstawiono  $t/2t_0$  zamiast  $(n+1)$ . Założenie takie oznacza, że wzory (2), (3) i (4) określają nie wszystkie punkty krzywej rzeczywistej, lecz tylko punkty wybrane, mianowicie odnoszące się do czasów  $t=2t_0(n+1)$ . Jak łatwo się zorientować (rys. 5), punkty te odpowiadają krzywej rzeczywistej w chwilach przychodzenia czoła fali do punktu 2-3. Dla pierwszej fali ( $n=0$ ) wzory określają tylko punkt mający  $t=2t_0$ , dla drugiej fali ( $n=1$ ) punkt  $t=4t_0$ , ogólnie dla ( $n+1$ )

— krzywą gładką, przechodzącą przez punkty załamania krzywej, złożonej z odcinków prostych.

Gdy  $s_1$  i  $s_{23}$  są falami napięcia, współczynniki napięciowe przejścia i odbicia fal są, jak wiadomo, równe

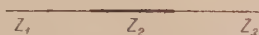
$$\alpha_{12} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad \alpha_{23} = \frac{2Z_3}{Z_2 + Z_3}. \quad (5)$$

Gdy  $s_1$  i  $s_{23}$  są falami prądu, współczynniki prądowe wynoszą

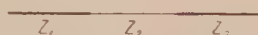
$$\alpha_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}; \quad \alpha_{23} = \frac{2Z_3}{Z_2 + Z_3}. \quad (6)$$

W obu przypadkach całkowity współczynnik odbicia

$$\beta = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \frac{Z_2 - Z_3}{Z_2 + Z_3}. \quad (7)$$



Rys. 6. Układ trójliniowy, w którym  $Z_1$  i  $Z_3$  są większe od  $Z_2$ . Na schemacie zastępczym odcinek  $Z_2$  zastąpiono przez kondensator  $C$ .



Rys. 7. Układ trójliniowy, w którym  $Z_1$  i  $Z_3$  są mniejsze od  $Z_2$ . Na schemacie zastępczym odcinek  $Z_2$  zastąpiono przez indukcję  $L$ .

Gdy  $Z_1 > Z_2$  i  $Z_3 > Z_2$  wzór na  $s_{23}$  — w założeniu, że  $s_1$  to fala napięcia ( $s_1 = u_1$ ) — przyjmuje postać zbliżoną do wzoru dla obwodu, w którym  $Z_2$  jest zastąpione przez kondensator (rys. 6). Mianowicie

dla  $u_1 = 1$

$$u_{23} = \frac{2Z_3}{Z_1 + Z_3} \left( 1 - e^{-\frac{t}{2t_0} \ln \frac{1}{\beta}} \right), \quad (8)$$

dla  $u_1 = at$

$$u_{23} = \frac{2Z_3}{Z_1 + Z_3} \left[ at + \frac{(Z_1 - Z_2)(Z_3 - Z_2)}{Z_2(Z_1 + Z_3)} at, (e^{-\frac{t}{2t_0} \ln \frac{1}{\beta}} - 1) \right], \quad (9)$$

dla  $u_1 = e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$u_{23} = \frac{2Z_3}{Z_1 + Z_3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(Z_1 - Z_2)(Z_3 - Z_2)}{Z_2(Z_1 + Z_3)} \left( \frac{t_0}{\tau} + \frac{t_0^2}{\tau^2} + \dots \right)} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{2t_0} \ln \frac{1}{\beta}} \right). \quad (10)$$

Analogicznie wzory dla układów, w których  $Z_2$  jest zastąpione przez skupioną pojemność  $C$  (rys. 6), są następujące:

dla  $u_1 = 1$

$$u_{23} = \frac{2Z_3}{Z_1 + Z_3} \left( 1 - e^{-\frac{t}{C} \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}} \right). \quad (1)$$

dla  $u_1 = at$

$$u_{23} = \frac{2Z_3}{Z_1 + Z_3} \left[ at + \frac{CZ_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} a \left( e^{-\frac{t}{C} \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}} - 1 \right) \right], \quad (1)$$

dla  $u_1 = e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$u_{23} = \frac{2Z_3}{Z_1 + Z_3} \frac{1}{1 - \frac{CZ_1 Z_3}{Z_1 + Z_3} \frac{1}{\tau}} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{C} \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}} \right). \quad (1)$$

Wzory powyższe jeszcze bardziej upodabniają się do zależności (8), (9) i (10), jeśli uwzględnić, że  $C = t_0 / Z_2$ .

Gdy  $Z_1 \gg Z_2$  oraz  $Z_3 \gg Z_2$ , oba typy wzorów mają nie tylko zbliżone współczynniki liniowe, ale i stałe czasu. Mianowicie

$$T = 2t_0 \frac{1}{\ln \frac{1}{\beta}} = \frac{t_0}{\frac{Z_2}{Z_1} + \frac{Z_2}{Z_3} + \frac{1}{3} \left( \frac{Z_2}{Z_1} \right)^3 + \frac{1}{3} \left( \frac{Z_2}{Z_3} \right)^3 + \dots} \quad (14)$$

Wobec  $t_0 = CZ_2$

$$T = t_0 \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 (Z_1 + Z_3)} = C \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3}.$$

Wynika stąd np. znany fakt, że odcinek kabla, wtrącony w linię nadpowietrzną, można uważać za skupioną pojemność.

Analogicznie, jeśli s. 33, uważać za prąd, okazuje się, że gdy  $Z_1 \ll Z_2$  oraz  $Z_3 \ll Z_2$ , zamiast odcinka o oporności  $Z_2$  można wstawić skupioną indukcyjność o wartości równej indukcyjności odcinka  $Z_2$ , to jest  $t_0 Z_2$  (rys. 7). Zależności od (8) do (13) pozostają ważne i w tym przypadku tylko formalnie zamiast  $u_1$  i  $u_{23}$  trzeba wstawić  $i_1$  oraz  $i_{23}$ , zamiast  $C$  wielkość  $L / Z_1 Z_3$  zamiast współczynnika  $2Z_3 / (Z_1 + Z_3)$  współczynnik  $2Z_1 / (Z_1 + Z_3)$ .

Stałą czasową w tym przypadku określa dla  $Z_1 \ll Z_2$  i  $Z_3 \ll Z_2$  wzór

$$T = 2t_0 \frac{1}{\ln \frac{1}{\beta}} = \frac{t_0}{\frac{Z_1}{Z_3} + \frac{Z_3}{Z_2} + \frac{1}{3} \left( \frac{Z_1}{Z_3} \right)^3 + \frac{1}{3} \left( \frac{Z_3}{Z_2} \right)^3 + \dots}, \quad (15)$$

a więc wzór

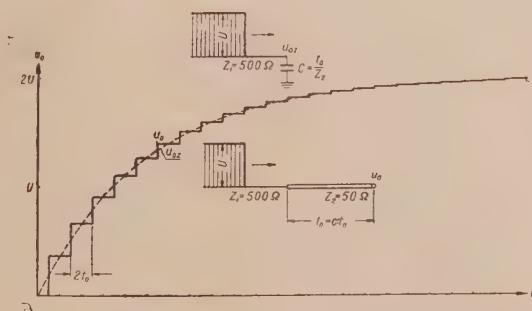
$$T = t_0 \frac{Z_2}{Z_1 - Z_2} - \frac{L}{Z_1 + Z_2}$$

zgodny ze wzorem dla obwodu ze skupioną indukcyjnością.

Podane wyżej znane zależności pozwalają na analizę kryteriów stosowania eliminacji oporności falowej. Analizę tę łatwiej przeprowadzić porównując typowe przypadki na podstawie wykresów.

### 3. ANALIZA ZJAWISKA ELIMINACJI OPORNOŚCI FALOWEJ W UKŁADACH 3-LINIOWYCH

Dla uproszczenia do analizy został wybrany przypadek, w którym odcinek linii można zastąpić przez pojemność skupioną. Posługując się wzorami (8), (9), (10) oraz (11), (12) i (13) wykreślono przebiegi czasowe  $u_{23}$  dla nadchodzących fal napięcia o postaciach 1,  $at$  i  $e^{-t/\tau}$  (rys. 8 i 17).



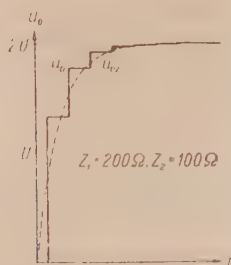
Rys. 8. Napięcie  $u_0$  na końcu kabla ( $Z_2 = 50 \Omega$ ) przy nadejściu fali prostokątnej z linii napowietrznej ( $Z_1 = 500 \Omega$ ) w układzie z rys. dolnego. Napięcie  $u_{0Z}$  na kondensatorze  $C$ , zastępującym kabel, w układzie zastępczym wg rys. górnego.

We wszystkich przypadkach przyjęto  $Z_3 = \infty$  (kraniec otwarty), natomiast dla  $Z_1, Z_2$  wybrano trzy wartości:  $\frac{500}{50}$ ,  $\frac{200}{100}$  i  $\frac{150}{100}$ . Ponieważ w przypadku fali  $e^{-t/\tau}$  postać krzywej  $u_{23}$  zależy w sposób istotny również od stosunku  $t_0, \tau$ , dano krzywe dla trzech wartości tego stosunku: 0,2—1—10.

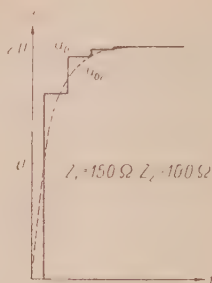
Przy wykreślaniu krzywych przekonano się, iż początek rachuby czasu dla obwodu z pojemnością skupioną, zastępującą odcinek linii  $Z_2$ , należy brać o  $t_0$  wcześniej niż dla krzywej rzeczywistej. Inaczej nie ma zgodności krzywych dla dużych czasów. Wynika to stąd, iż napięcie na końcu



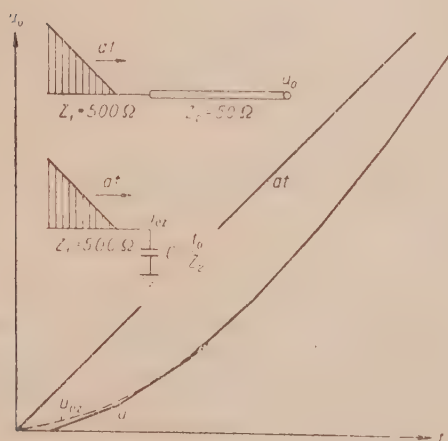
odcinka  $Z_2$  zjawia się z opóźnieniem  $t_0$  w stosunku do napięcia występującego na początku tego odcinka. Gdy zamiast odcinka  $Z_2$  włączona



Rys. 9. Jak rys. 8,  
z tym że  $Z_1 = 200 \Omega$ ,  
 $Z_2 = 100 \Omega$ ,



Rys. 10. Jak rys. 8,  
z tym że  $Z_1 = 150 \Omega$ ,  
 $Z_2 = 100 \Omega$ ,

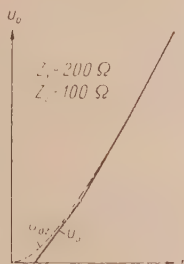


Rys. 11. Napięcie  $u_0$  na końcu kabla ( $Z_2 = 50 \Omega$ ) przy nadejściu fali prostoliniowej  $at$  z linii napowietrznej ( $Z_1 = 500 \Omega$ ) w układzie z rys. górnego.

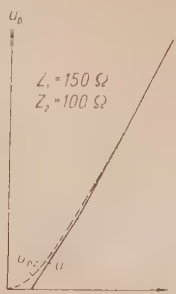
Napięcie  $u_{0z}$  na kondensatorze  $C$ , zastępującym kabel, w układzie zastępczym wg rys. dolnego.

jest skupiona pojemność, opóźnienie to nie występuje. Ponieważ dotychczas czas  $t$  przyjmowaliśmy za równy 0 w chwili trafienia fali w koniec odcinka  $Z_2$ , dla obwodu o stałych skupionych

należy we wzorach brać czas  $(t + t_0)$ . Oczywiście taka zmiana czasu nie jest konieczna, gdy określamy przebieg napięcia na początku odcinka  $Z_2$ :

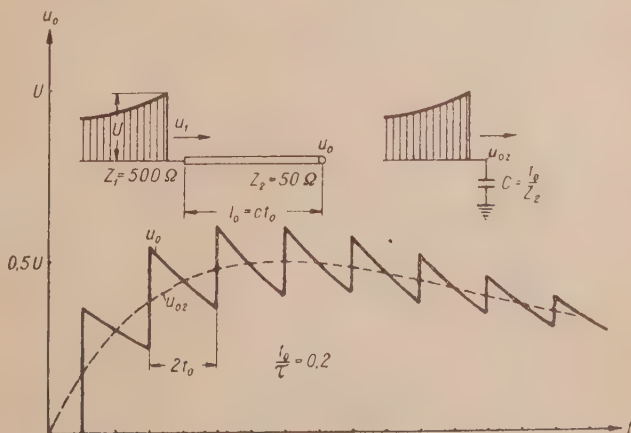


Rys. 12. Jak rys. 11,  
z tym że  $Z_1 = 200 \Omega$ ,  
 $Z_2 = 100 \Omega$ .



Rys. 13. Jak rys. 11,  
z tym że  $Z_1 = 200 \Omega$ ,  
 $Z_2 = 100 \Omega$ .

początek rachuby czasu dla obwodu z odcinkiem  $Z_2$  i dla obwodu z pojemnością skupioną jest wtedy ten sam (por. rys. 8 i 18).



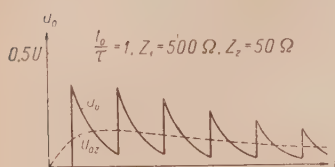
Rys. 14. Napięcie  $u_0$  na końcu kabla ( $Z_2 = 50 \Omega$ ) przy nadjeździe fali wykładniczej  $Ue^{-\frac{t}{\tau}}$  z linii napowietrznej ( $Z_1 = 500 \Omega$ ) w układzie z rys. lewego.

Napięcie  $u_{02}$  na kondensatorze  $C$ , zastępującym kabel, w układzie zastępczym wg rys. prawego. Stosunek  $t_0/\tau = 0.2$ .

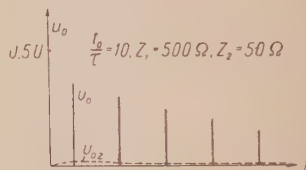
Dla  $u_1$  i oraz  $u_1$  e  $-\frac{t}{\tau}$  wzory dla przebiegów falowych określają, jak było powiedziane wyżej, dolną obwiednię krzywej rzeczywistej. Górna obwiednia i mediana obwiedni (rys. 5) mają przebieg zbliżony. Mediana

jak wynika z rysunków, odpowiada dość ściśle przebiegowi w obwodzie ze stałymi skupionymi po eliminacji oporności falowej. Należy to uwzględnić porównując wzory.

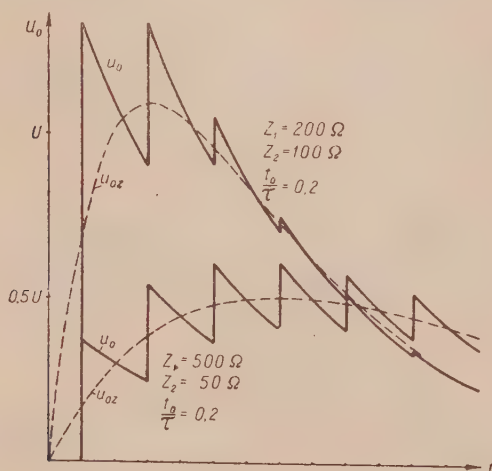
Dla  $u_1$  - at przebiegi napięcia rzeczywistego i przy eliminacji  $Z$  różnią się



Rys. 15. Jak rys. 14, ale  $\frac{t_0}{\tau} = 1$ .



Rys. 16. Jak rys. 14, ale  $\frac{t_0}{\tau} = 10$ .

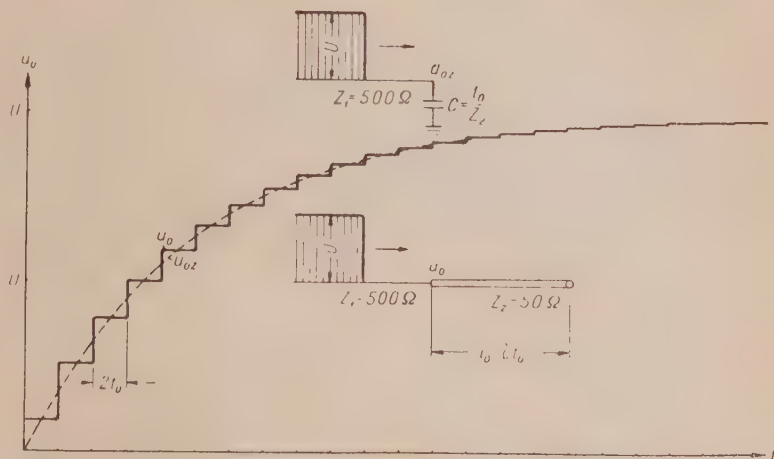


Rys. 17. Porównanie przypadku z rys. 14 dla  $t_0/\tau = 0,2$   $Z_1 = 500\Omega$ ,  $Z_2 = 50\Omega$  (krzywa dolna) i przypadku  $t_0/\tau = 0,2$ ,  $Z_1 = 200\Omega$ ,  $Z_2 = 100\Omega$  (krzywa górna).

tym, że pierwszy jest krzywą łamaną składającą się z odcinków prostej, a drugi krzywą gładką o bardzo zbliżonym przebiegu.

Analizując rysunki 8÷17 należy rozpatrywać oddzielnie przypadek fali nadchodzącej prostoliniowej ( $u_1 = 1, u_1 = at$ ) i wykładniczej ( $u_1 = e^{-t/\tau}$ ). W pierwszym przypadku (rys. 8÷13) zgodność przebiegów  $u_{23}$  dla obwodu ze stałymi rozłożonymi i z pojemnością skupioną zależy tylko od

stosunku  $Z_1/Z_2$  i  $Z_3/Z_2$ , a więc ogólnie biorąc od  $\beta$ . Im współczynnik  $\beta$  jest bliższy jedności, tym lepsza zgodność obu przebiegów. Charakterysty-



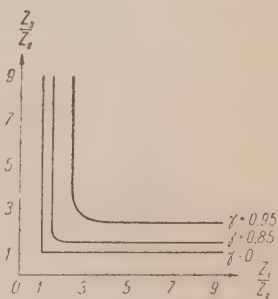
Rys. 18. Jak rys. 8 z tą różnicą, że napięcie  $u_0$  odnosi się do początku kabla.

tyczne jest, iż nawet dla  $Z_1/Z_2=2$ , a więc — przy  $Z_3/Z_2=\infty$  — dla  $\beta=0,33$  przebiegi  $u_{z3}$  określone obu sposobami są zbliżone (rys. 9÷12).

Dobłą orientację co do dopuszczalności eliminacji oporności falowej dają w omawianych przypadkach krzywe z rys. 19 i 20. Krzywe te określają stosunek  $\gamma$  rzeczywiście występującej (dla obwiedni) stałej czasu do stałej czasu w obwodzie z pojemnością skupioną  $C$ .

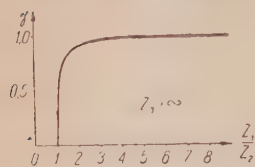
Dla fali nadchodzącej  $u_1=e^{-t/\tau}$  możliwość zastąpienia odcinka  $Z_2$  przez  $C$  zależy od wartości  $\beta$ , a ponadto jeszcze od stosunku  $t_0/\tau$ . Wynika to ze wzoru (10), który upodabnia się tylko dla małych wartości  $t_0/\tau$  do wzoru (13). Tylko dla małych  $t_0/\tau$  można mianowicie pominąć inne — poza pierwszym — wyrazy szeregu  $(t_0/\tau + t_0^2/\tau^2 + 2/3 \cdot t_0^3/\tau^3 + \dots)$ . Widać to również wyraźnie z rys. 14÷16.

Aby zrozumieć, od czego zależy możliwość stosowania eliminacji oporności falowej, należy przeprowadzić analizę rozkładu napięcia  $u_2$  (ogól-



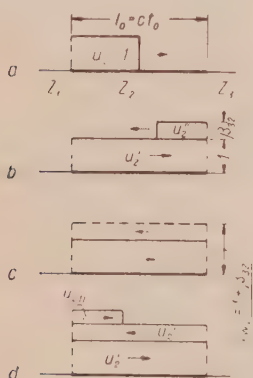
Rys. 19. Zależność  $\gamma$ , tj. stosunku stałej czasu dla obwiedni krzywej napięcia wg wzoru (8) do stałej czasu napięcia w obwodzie z pojemnością wg wzoru (11) — od stosunków  $Z_1/Z_2$  i  $Z_3/Z_2$ .

nie biorąc funkcji  $s_2$ ) wzdłuż odcinka  $Z_2$ . Analizę tę wykonamy w odniesieniu do przypadku, w którym eliminacja prowadzi do pojemności skupionej; wyniki analizy są słuszne również dla przypadku indukcyjności skupionej.

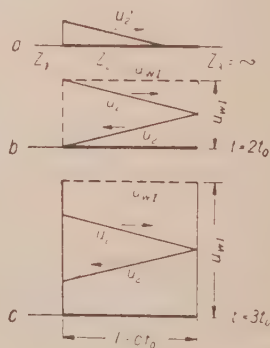


Rys. 20. Zależność  $\gamma$  (jak rys. 19) od stosunku  $Z_1/Z_2$  przy  $Z_3 = \infty$ .

Najprostsze stosunki panują, gdy fala wchodząca na  $Z_2$  ma wartość stałą; zrobimy założenie  $u'_2 = 1$  (rys. 21a) ( $u'_2$  oznacza falę idącą na linii  $Z_2$  w prawo,  $u''_2$  — w lewo). W chwili gdy fala  $u'_2$  po dojściu do końca odcinka  $Z_2$  i odbiciu się dochodzi jako fala  $u''_2$  z powrotem do początku odcinka  $Z_2$  (rys. 21c), na tym odcinku panuje napięcie  $u_{wI} = 1 \cdot (1 + \beta_{22})$ . Napięcie to jest takie samo we



Rys. 21. Wejście fali prostokątnej na odcinek  $Z_2$  i kolejne jej odbicia.



Rys. 22. Wejście fali prostolinijnie rosnącej na odcinek  $Z_2$  i kolejne jej odbicia. Przypadek  $Z_3 = \infty$ .

wszystkich punktach odcinka  $Z_2$ , odcinek ten gra więc rolę okładziny kondensatora o pojemności równej pojemności własnej linii, czyli  $C = t_0/Z_2$ . Cechą istotną kondensatora o skupionej pojemności  $C$  jest właśnie taka sama wartość napięcia we wszystkich punktach jego okładziny.

Fala  $u'_2$  jest zasilana, zatem dla dowolnych chwil, począwszy od chwili nałożenia się na całej długości odcinka  $Z_2$  fal  $u'_2$  i  $u''_2$ , napięcie  $1 \cdot (1 + \beta_{22})$  można uważać za napięcie panujące na skupionej pojemności.

Fala  $u''_2$ , odbijając się od początku odcinka  $Z_2$  (rys. 21d), daje początek nowej fali  $u'_2$  równej  $u'_{2II} = 1 \cdot \beta$ . Do tej fali można zastosować poprzednie rozumowanie, to znaczy, że i dla niej można uważać odcinek  $Z_2$



za  $C$ , poczynawszy od chwili nałożenia się  $u'_2$  i  $u''_2$  na całej długości tego odcinka (pokrycia odcinka  $Z_2$  przez  $u'_{2II}$  i  $u''_{2II}$ ).

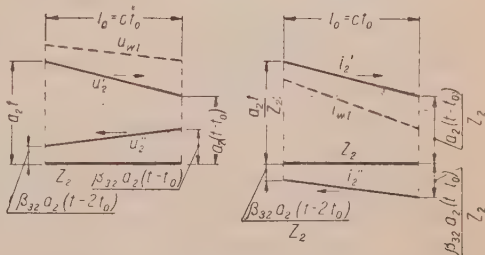
Tak więc można, ogólnie biorąc, traktować odcinek  $Z_2$  jako skupioną pojemność  $C$ , na której napięcie zwiększa się skokami:  $(1 + \beta_{32}) \dots (1 + \beta_{32})\beta \dots (1 + \beta_{32})\beta^2 \dots \dots (1 + \beta_{32})\beta^n$  w odstępach czasu  $2t_0$ .

Jeśli skoki napięcia na pojemności  $C$  są nieduże, można uważać, że napięcie zmienia się w sposób ciągły. Jest to istotna cecha, jakiej musi odpowiadać obwód z pojemnością  $C$  skupioną, zastępującą odcinek  $Z_2$ . Zatem kryterium stosowalności eliminacji oporności falowej sprowadza się tutaj do małych skoków napięcia. Jak się łatwo zorientować, kryterium to jest równoważne z wartością całkowitego współczynnika odbicia  $\beta$  bliską 1. Gdy  $\beta$  bardzo różni się od 1, np. wynosi  $\beta = 0,2$ , kolejne skoki są bardzo nierówne:  $1 - 0,2 - 0,04 - 0,008 - \dots$ . Prawie cała wartość końcową napięcia jest tutaj osiągnięta przy pierwszym skoku. Gdy  $\beta$  jest zbliżone do 1, np.  $\beta = 0,9$ , wtedy skoki są małe w stosunku do wartości końcowej (będącej ich sumą):  $1 - 0,9 - 0,81 - 0,73 - \dots$ .

Przechodząc do fal nadchodzących typu  $u_1 = at$ , zatrzymamy się najpierw na przypadku  $\beta_{32} = 1$  (rys. 22a). Fala  $u'_2 = a_2 t$ , która weszła na  $Z_2$ , po odbiciu się (zupełnym) od  $Z_3 = \infty$  i dojściu do początku  $Z_2$  daje i w tym przypadku wartość napięcia  $u_{wI}$ , taką samą we wszystkich punktach odcinka  $Z_2$  (rys. 22b). Wynika to z podobieństwa trójkątów. Dotyczy to także następnych fal  $u'_2$ , wchodzących na  $Z_2$ , równych  $\beta a_2 t \dots \beta^2 a_2 t \dots \dots \beta^n a_2 t$ . Różnica w stosunku do przypadku poprzedniego polega na tym, że wartość  $u_{wI}$  (rys. 22b), osiągnięta we wszystkich punktach odcinka  $Z_2$ , rośnie w czasie (rys. 22c).

Wzrost ten jest ciągły, jak w przypadku pojemności skupionej. Oczywiście kryterium eliminacji oporności falowej jest tutaj takie samo, jak dla  $u'_2 = 1$ .

W przypadku ogólniejszym, gdy  $\beta_{32} < 1$ , należy rozpatrzyć zarówno rozkład napięć, jak i prądów wzdłuż odcinka  $Z_2$  (rys. 23). Gdy fale idące w prawo  $u'_2$  i w lewo  $u''_2$  pokrywają się na całej długości odcinka  $Z_2$ , napięcie na nim ( $u_{wI}$ ) nie jest takie samo we wszystkich punktach. Mimo to można odcinek  $Z_2$  uważać za pojemność. Aby to wykazać, określimy średnią wartość napięcia wzdłuż odcinka i różnicę prądów na jego krańcach.



Rys. 23. Wejście fali prostolinijnie rosnącej na odcinek  $Z_2$  i kolejne jej odbicia. Przypadek ogólny ( $Z_3 \neq \infty$ ).

Średnia wartość napięcia  $u_{sr}$  na odcinku  $Z_2$  wynosi:

$$u_{sr} = \frac{1}{2} [a_2 t + a_2 (t - t_0) + \beta_{32} a_2 (t - 2t_0) + \beta_{32} a_2 (t - t_0)] = \\ = a_2 t (1 + \beta_{32}) - \frac{a_2 t_0}{2} (1 + 3\beta_{32}). \quad (16)$$

Czas liczono tutaj od chwili trafienia fali w początek odcinka  $Z_2$ ;  $\beta_{32}$  — współczynnik odbicia dla fali napięcia.

Różnica prądów na początku i na końcu odcinka  $Z_2$ , a więc prąd, który upływa pojemnościowo na długości tego odcinka, wynosi

$$i = \frac{1}{Z_2} [a_2 t - a_2 (t - t_0) - \beta_{32} a_2 (t - 2t_0) + \beta_{32} a_2 (t - t_0)] = \frac{a_2 t_0}{Z_2} (1 + \beta_{32}). \quad (17)$$

Uważając, że odcinek  $Z_2$  jest kondensatorem pod napięciem równym średniej wartości wg wzoru (16), otrzymamy na prąd pojemnościowy, a więc prąd upływający na długości odcinka  $Z_2$ , wartość:

$$i = C \frac{du_{sr}}{dt} = \frac{t_0}{Z_2} \frac{du_{sr}}{dt} = \frac{a_2 t_0}{Z_2} (1 + \beta_{32}). \quad (18)$$

Wzór (18) jest identyczny z (17). Uważanie więc odcinka  $Z_2$  za kondensator skupiony jest i w tym przypadku uzasadnione — bez względu na wartość współczynnika  $\beta_{32}$ .

Oczywiście napięcie na kondensatorze, zastępującym  $Z_2$ , i w przypadku  $u_1 = at$  wzrasta skokami zależnymi od  $\beta$ :  $[p\beta \dots p\beta^2 \dots p\beta^n]$ , gdzie  $p = a_2 t_0 (1,5 + 0,5 \beta_{32})$ . Toteż tylko przy  $\beta$  bliskim jedności zmianę napięcia na  $C$  można uważać za ciągłą.

Powyższe wnioski stają się jasne, jeśli zważyć, że gdy prostolinijne fale napięcia  $a_2 t$  oraz  $a_2 t \cdot \beta_{32}$  przesuwają się po odcinku  $Z_2$ , w każdym jego punkcie napięcie ma tę samą pochodną  $a_2 (1 + \beta_{32})$  i w każdym punkcie odpływa ten sam prąd pojemnościowy. Cały prąd pojemnościowy jest więc równy prądowi, jaki by płynął przez pojemność skupioną, równą pojemności odcinka  $Z_2$ , pod wpływem napięcia o tej samej stromości.

Analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla  $Z_2 > Z_1$  i  $Z_2 > Z_3$ , tylko że zamiast  $u_{sr}$  oblicza się  $i_{sr}$  i uwzględnia, że  $L di_{sr}/dt$  równa się różnicy napięć na odcinku  $Z_2$ .

Gdy fala  $s_2$  nie jest prostolinijna, po całkowitym nałożeniu się fali odbitej na idącą, odcinek  $Z_2$  nie gra roli pojemności lub indukcyjności, nawet biorąc pod uwagę średnią wartość napięcia lub odpowiednio prądu. Jednak gdy dla dowolnej chwili fala  $s_2$  jest w przybliżeniu prostolinijna

w zakresie czasów  $t \pm t_0$ , można zastosować poprzednie rozumowanie. Tak np. falę  $e^{-t/\tau}$  można uważać za złożoną z odcinków prostej w zakresie czasów od  $(t-t_1)$  do  $(t+t_0)$  tylko wtedy, gdy  $t_0/\tau$  jest odpowiednio małe. Tym tłumaczy się wpływ  $t_0/\tau$ , widoczny we wzorze (10) i na rys. 14÷16.

Reasumując powyższą analizę można za ogólne kryterium eliminacji oporności falowej uznać:

1. Przebieg fali na odcinku  $Z_2$  zbliżony do prostoliniowego na długości  $\pm t_0$  w otoczeniu każdej wartości  $t$ . (Inaczej: prostoliniowość fali w czasie przebiegu wzdłuż odcinka  $Z_2$ ).
2. Warunki odbicia na końcu odcinka  $Z_2$  takie, że skoki średniej wartości  $s_2$ , określone w chwilach pokrycia się fal idącej z odbitą na całej długości odcinka, są nieduże. Dla układów, w których występują tylko linie, a nie ma elementów o stałych skupionych, warunek 2. można ująć ściślej, jako 2a.
- 2a. Współczynnik  $\beta$  niewiele odbiegający od 1.

#### 4. UKŁADY ZASTĘPCZE II LUB T DLA ODCINKA LINII W UKŁADZIE 3-LINIOWYM

Warto zaznaczyć, że w przypadkach gdy  $\beta$  jest małe, zastępowanie odcinka  $Z_2$  przez układy II lub T (pojedyncze) nie okazuje się praktyczne. Np. dla przypadku z rys. 12 przy  $Z_1 = 200 \Omega$ ,  $Z_2 = 100 \Omega$ ,  $Z_3 = \infty$  wzór na obwiednię krzywej rzeczywistej jest

$$u_{23} = 2at + 2at_0 e^{-\frac{0,549t}{t_0}} - 2at_0. \quad (19)$$

Przy zastąpieniu odcinka  $Z_2$  przez C mamy

$$u_{23} = 2at + 4at_0 e^{-\frac{0,5}{t_0}(t+t_0)} - 2at_0, \quad (20)$$

przez układ II

$$u_{23} = 2at + 3,67at_0 e^{-\frac{0,53}{t_0}(t+t_0)} - 2at_0 + \\ + at_0 e^{-\frac{0,23}{t_0}(t+t_0)} \left[ 0,02 \sin 1,92 \frac{t+t_0}{t_0} + 0,33 \cos 1,92 \frac{t+t_0}{t_0} \right], \quad (21)$$

przez układ T

$$u_{23} = 2at + 4,12at_0 e^{-\frac{0,59}{t_0}(t+t_0)} - 0,12at_0 e^{-\frac{3,41}{t_0}(t+t_0)} - 2at_0. \quad (22)$$

Jak widać, rozbieżności pozostają znaczne.

Stosowanie układów  $II$  i  $T$  wielokrotnych również nie jest praktyczne ze względu na konieczność wielkiego wkładu pracy w obliczenia, nawet przy wprowadzeniu funkcji skokowych (jump-functions).

Posługiwanie się układami zastępczymi z  $C$  i  $L$  nawet wtedy, gdy nie oddają one ściśle przebiegów rzeczywistych, może mieć wartość praktyczną, gdy interesuje nas stan końcowy układu, następujący praktycznie po kilkunastu odbiciach. Jest to eliminacja oporności falowej w znaczeniu węższym według definicji Bewleya. Jako przykład można przytoczyć przypadek uderzenia pioruna w słup, obliczony przez Sirotńskiego [16], w którym autor nie interesuje się napięciem na słupie dla czasów mniejszych od  $1 \mu s$ . Dla czasów dłuższych można w tym przypadku przyjąć, że słup gra praktycznie rolę indukcyjności.

### 5. DRGANIA SKUTKIEM WIELOKROTNYCH ODBIC

Gdy współczynnik  $\beta$  jest ujemny, to znaczy gdy w układzie 3-liniowym  $Z_1 > Z_2 > Z_3$  lub  $Z_1 < Z_2 < Z_3$ , wtedy powstają drgania skutkiem odbijania się fal krążących po odcinku  $Z_2$ . Wzory (2), (3) i (4) zachowują swą ważność, mimo że  $\beta$  jest ujemne, gdyż

$$e^{-\frac{t}{2t_0} \ln \frac{1}{\beta}} = e^{-\frac{t}{2t_0} \ln \frac{1}{-\beta}} \left( \cos 2\pi m \frac{t}{4t_0} + j \sin 2\pi m \frac{t}{4t_0} \right), \quad (23)$$

$$m = 1, 3, 5 \dots$$

Przy  $m=1$  funkcja ta ma wartości rzeczywiste tylko dla  $t$  będącego całkowitą wielokrotnością  $2t_0$  i tylko dla tych wartości daje obwiednie krzywej rzeczywistej. Nie ma jednak tutaj zbieżności (przypadkowej), jak uprzednio, że cały przebieg krzywej odpowiada obwiedni.

Wzory (2), (3) i (4) po wstawieniu zależności (23) nie pozwalają wnioskować o rzeczywistym przebiegu napięć lub prądów. Przebiegi te najpraktyczniej określić przez nałożenie fal. Wzory, zawierające wyższe harmoniczne, nawet w najprostszym przypadku są dość złożone. Np. dla fali nadchodzącej  $u_1=1$  otrzymuje się

$$u_{23} = 2 \left[ 1 - \frac{2Z_2}{Z_1 - Z_2} e^{-a \frac{t}{t_0}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{a \cos 2\pi m \frac{t}{4t_0} - \frac{\pi m}{2} \sin 2\pi m \frac{t}{4t_0}}{a^2 + \frac{\pi^2 m^2}{4}} \right], \quad (24)$$

gdzie

$$a = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{-\beta} = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_2 + Z_1}{Z_2 - Z_1},$$

lub posługując się funkcją  $E$  (entier):

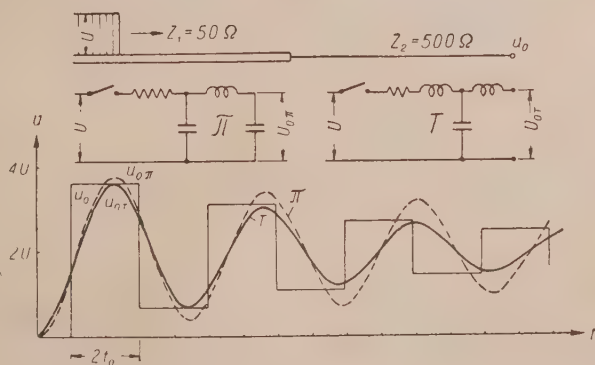
$$u_{23} = 2 \left[ 1 - \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{4}{\pi} \left( \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^{E \frac{t}{2t_0}} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin 2\pi m \frac{t}{4t_0}}{m} \right]. \quad (25)$$

Wobec dużych amplitud harmoniczných we wzorach (24) i (25) można się spodziewać, że pojedyncze, a nawet kilkakrotne układy  $II$  i  $T$  nie dadzą dosyć dokładnego przybliżenia. Rzeczywiście, np. przy  $Z_1 = 50 \Omega$ ,  $Z_2 = 500 \Omega$  i  $Z_2 = \infty$ , dla układu  $T$  zastępującego odcinek  $Z_2$ , mamy

$$u_{23} = 2 \left[ 1 - e^{-0,1 \frac{t+t_0}{t_0}} \left( \cos 1,411 \frac{t+t_0}{t_0} + 0,071 \sin 1,411 \frac{t+t_0}{t_0} \right) \right], \quad (26)$$

zaś dla układu  $II$

$$u_{23} = 2 \left[ 1 - e^{-0,05 \frac{t+t_0}{t_0}} \left( 0,995 \cos 1,417 \frac{t+t_0}{t_0} + 0,106 \sin 1,417 \frac{t+t_0}{t_0} \right) - 0,005 e^{-19,9 \frac{t+t_0}{t_0}} \right]. \quad (27)$$



Rys. 24. Napięcie  $u_0$  na końcu linii napowietrznej ( $Z_2 = 500 \Omega$ ) przy nadejściu fali prostokątnej z kabla ( $Z_1 = 50 \Omega$ ) w układzie z rys. górnego.

Napięcia  $u_{0II}$  i  $u_{0T}$  w przypadku zastąpienia linii napowietrznej przez układ  $II$  lub  $T$  wg rys. dolnych.

Krzywa rzeczywista składa się z wyrazu równego 2 i krzywej okresowej prostokątnej tłumionej (o okresie  $4t_0$ , a więc  $\omega = 1,571 \cdot 1/t_0$ ) o amplitudzie początkowej  $1,64 U$ , mnożonej przez  $(-\beta)^n = 0,818^n$  dla otrzymania ampli-

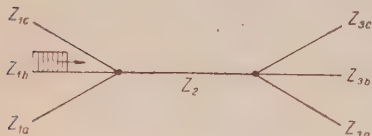


tudy w  $n$ -tym półokresie. Tłumienie amplitudy tej krzywej można określić przy pomocy czynnika  $e^{-(t/2t_0) \ln 1/(-\beta)} = e^{-0,1 \cdot t/t_0}$ .

Stopień zgodności krzywych, określonych równaniami (26) i (27) z rzeczywistością ilustruje rys. 24.

## 6. UKŁADY WIELOLINIOWE

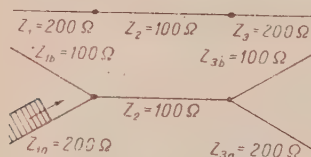
Rozpatrywane dotychczas były układy 3-liniowe, tj. takie, w których odcinek linii o oporności falowej  $Z_2$  znajdował się między dwiema liniami o innych opornościach falowych  $Z_1$  i  $Z_3$ . W przypadku ogólniejszym może być kilka linii  $Z_1$ , np.  $Z_{1a}, Z_{1b}, Z_{1c}$  i kilka  $Z_3$ , np.  $Z_{3a}, Z_{3b}, Z_{3c}$ . Taki układ będzie nazywany wieloliniowym (rys. 25).



Rys. 25. Układ wieloliniowy.

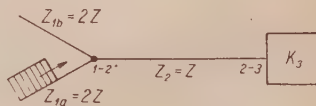
O eliminacji oporności falowej w układach 3-liniowych decydowała — poza kształtem fali nadchodzącej — wartość  $\beta$ . To samo kryterium można zastosować i do układów wieloliniowych, uwzględniając, że do wzoru na  $\beta$  zamiast  $Z_{1a}, Z_{1b}, Z_{1c}$  oraz  $Z_{3a}, Z_{3b}, Z_{3c}$  w połączeniu równoległym wchodzi odpowiednio oporności zastępcze.

W układach wieloliniowych może się zdarzyć, że odcinek linii  $Z_2$ , który grał np. rolę pojemności, będzie zachowywał się jak indukcyjność.



Rys. 26. Układ górny —  $Z_2$  gra rolę pojemności.

Układ dolny —  $Z_2$  gra rolę indukcyjności.



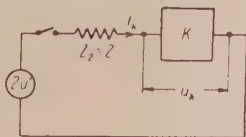
Rys. 27. Układ, w którym oporność falowa  $Z_2$  eliminuje się całkowicie.  $K_3$  — dowolna kombinacja  $R, L, C, Z$ .

Ilustruje to rys. 26, na którym dodanie dwóch dodatkowych linii zmienia charakter układu.

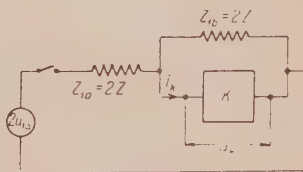
Wśród układów wieloprzewodowych wyróżnić należy przypadek szczególny, w którym oporność  $Z_2$  eliminuje się całkowicie, tzn. zamiast niej występuje w obwodzie zastępczym zwarcie. Jest to przypadek z rys. 27, tj. przypadek, w którym  $Z_{1a}=2Z, Z_{1b}=2Z, Z_2=Z$ , co odpowiada napięciowemu współczynnikowi odbicia  $\beta_{12}=0, [\beta_{12}=(Z_1-Z_2)/(Z_1+Z_2)=(Z-Z)/(Z+Z)=0]$ , a więc również  $\beta=0$ .

Na końcu linii o oporze  $Z_2$  występuje  $K_3$  — dowolna kombinacja stałych skupionych  $R, L, C, Z$  (oporność czynna  $Z$  w zastępstwie linii nieskończenie długiej).

Współczynnik przejścia  $a_{12}$  wynosi tutaj 0,5, a współczynnik  $a_{21}=1$ . Wobec  $a_{21}=1$  fala odbita od  $K_3$  nie ulega odbiciu w punkcie 1-2 i nie wraca do  $K_3$ . Rozpatrując więc przebiegi  $u_k$  i  $i_k$  można nie uwzględniać długości odcinka  $Z_2$ . Co więcej, jak łatwo udowodnić, przebiegi czasowe  $u_k$  i  $i_k$  są takie same, jakby  $K_3$  było przyłączone wprost w punkcie 1-2.



Rys. 28. Układ zastępczy dla punktu 2-3 układu z rys. 27.



Rys. 29. Układ zastępczy dla punktu 1-2 układu z rys. 27 przy założeniu całkowitej eliminacji  $Z_2$ .

Mianowicie z obwodu zastępczego dla punktu 2-3 (rys. 28), w którym siła elektromotoryczna wynosi  $2u' = 2a_{12}u_{1a} = u_{1a}$ , wynika, że

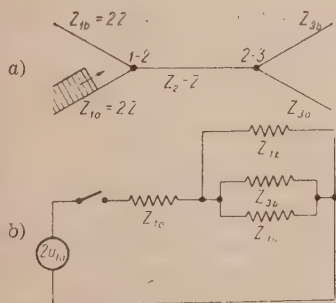
$$i_k = \frac{2u' - u_k}{Z} = \frac{u_{1a} - u_k}{Z}. \quad (28)$$

Ten sam wzór jest słuszny dla obwodu zastępczego dla punktu 1-2, w którym odcinek  $Z_2$  przyjęto za zwarcie (rys. 29):

$$i_k = \frac{2u_{1a} - u_k}{2Z} - \frac{u_k}{2Z} = \frac{u_{1a} - u_k}{Z}. \quad (29)$$

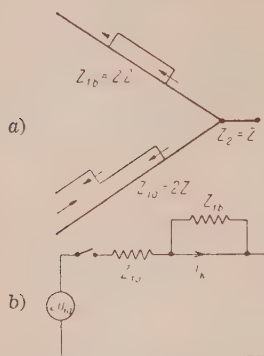
Układ z rys. 29 z całkowicie wyeliminowaną opornością  $Z_2$  prawidłowo oddaje przebiegi  $u_k$  i  $i_k$ , nie odtwarza jednak rzeczywistego napięcia w punkcie 1-2. Aby je otrzymać, należy uwzględnić przesunięcie czasowe, wywołane istnieniem odcinka  $Z_2$ . Tylko w przypadku prostokątnej fali nadchodzącej obwód zastępczy z rys. 29 jest słuszny zarówno dla przebiegów w 2-3, jak w 1-2 (po czasie  $2t_0$  od trafienia fali w 1-2). Ilustrują to np. rys. 31 i 32.

Wyeliminowanie z obwodu zastępczego odcinka linii o oporności falowej  $Z_2$  nie oznacza, że na tym odcinku w rzeczywistości nie panuje

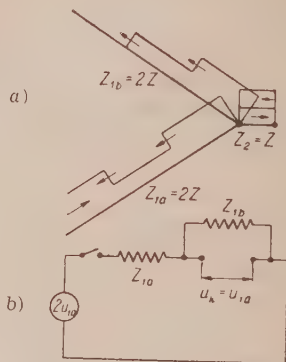


Rys. 30. a. Jak rys. 27 z tym, że jako  $K_3$  przyjęto 2 linie  $Z_{3a}$  i  $Z_{3b}$ . b. Obwód zastępczy dla rys. a.

pewne napięcie. Znajomość jego może być w pewnych przypadkach potrzebna, np. gdy odcinek  $Z_2$  stanowi słup uderzony przez piorun. Róż-



Rys. 31. a. Fale napięcia w układzie, w którym zachodzi zupełna eliminacja  $Z_2$ . Odcinek  $Z_2$  zwarty na końcu. b. Obwód zastępczy dla rys. a



Rys. 32. a. Fale napięcia w układzie, w którym zachodzi zupełna eliminacja  $Z_2$ . Odcinek  $Z_2$  otwarty na końcu. b. Obwód zastępczy dla rys. a

nicę napięć na końcach odcinka  $Z_2$  wyznacza się jako różnicę napięć punktu 2-3 ze schematu zastępczego dla chwil różniących się o  $t_0$ .

## 7. UKŁAD Z KONDENSATOREM NA KRAŃCU LINII

Ogólny obwód, w którym można posługiwać się eliminacją oporności falowej, to obwód, w którym z obu stron odcinka  $Z_2$  znajduje się dowolna kombinacja  $R$ ,  $L$ ,  $C$  i  $Z$  (linii), jak to przedstawiono na rys. 33. Na tym rysunku w  $K_1$  ukryte jest źródło napięcia bądź pod postacią fali wędrowną na jednej z linii dochodzących, bądź jako skupione źródło siły elektromotorycznej.

Rys. 33. Ogólny przypadek, w którym może zajść eliminacja oporności falowej  $Z_2$ .  $K_1$  i  $K_3$  — kombinacje  $R$ ,  $L$ ,  $C$  i  $Z$ .

Dla przypadku ogólnego nie jest możliwe podanie szczegółowych kryteriów, kiedy odcinek  $Z_2$  będzie grał rolę  $C$ , a kiedy  $L$ . Wynika to choćby stąd, że w przypadku występowania w  $K_1$  i  $K_3$  pojemności lub indukcyjności współczynnik  $\beta$  przestaje być wielkością stałą. Kryteria eliminacji oporności falowej można tutaj sformułować, jak następuje. Po pierwsze fala idąca na  $Z_2$  musi po odbiciu się od  $K_3$  tak nałożyć się na siebie, aby wartość  $u_{ir}$  ( $s_{ir}$ ) (rys. 23) wzdłuż całego odcinka  $Z_2$

była stała lub też aby średnia wartość  $s_w$  (w przestrzeni) spełniała odpowiednio wzory  $i = C \, di_{sr}/dt$  lub  $u = L \, di_{sr}/dt$  (zależnie od tego, czy  $s$  jest falą prądu czy napięcia). Oznacza to, że fala idąca i odbita muszą być prostolinijne. Po drugie zmiana tej średniej wartości powinna odbywać się w sposób możliwie ciągły, a więc małymi skokami, odpowiadającymi chwilom pokrycia się fali idącej z odbitą na całej długości odcinka  $Z_2$ .

Jako przykład okoliczności, w których stosowanie tych kryteriów sprawia pewne trudności, zostanie rozpatrzony przypadek wyładowania kondensatora  $C$ , uprzednio naładowanego do wartości napięcia  $U$ , przez linię zwartą na końcu (rys. 34). Jest to przypadek klasyczny, zbadany teoretycznie przez L. V. Bewleya [2] (rys. 2) i I. S. Stiekolnikowa [17], a doświadczalnie przez K. Bergera [1].

Bewley podaje rozwiązanie dla napięć i prądów pod postacią sum szeregów. Szeregi te nie nadają się łatwo do interpretacji, dlatego niżej zostaną podane wzory uproszczone.

Jak łatwo się zorientować, pierwsza fala idąca na linii po zamknięciu wyłącznika (rys. 34) ma postać:  $U/Z \cdot e^{-t/CZ} = U/Z \cdot e^{-t/T}$ . Fala ta odbija się od zwartego końca linii, dochodzi do  $C$  i tu znów odbija się dając początek nowej fali. Tę nową falę spotyka znów ten sam los, co pierwszą itd. Ponieważ szeregi potęgowe, zawierające  $t/T$ ,  $(t/T)^2$ ,  $(t/T)^3 \dots$  wyrażające kolejne fale, są bardzo nieprzejrzyste, można wziąć zamiast pierwszej fali  $(U/Z)e^{-t/T}$  kilka, np. 4 wyrazy szeregu zastępującego tę funkcję wykładniczą:  $U/Z [1 - t/T + 1/2 (t/T)^2 - 1/6 (t/T)^3]$ . Otrzymuje się wtedy dużo prostsze wzory, nadające się do interpretacji.

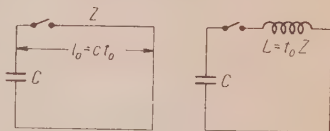
Łatwo wyprowadzić, iż fala wynikająca z odbicia w  $C$  fali, przedstawionej przez podany wyżej szereg, jest sumą takich samych potęg  $t/T$ , ale z innymi współczynnikami liczbowymi. Ogólnie biorąc, gdy fala trafiająca w  $C$  ma postać:

$$i_1 = 1 - mt + pt^2 - rt^3,$$

to następna fala odbita od  $C$ , idąca na linię, będzie:

$$i_2 = 1 - \left(m + \frac{2}{T}\right)t + \left(p + \frac{1}{T^2} + \frac{m}{T}\right)t^2 - \left(r + \frac{1}{3T^3} + \frac{m}{3T^2} + \frac{2p}{3T}\right)t^3. \quad (30)$$

Opierając się na wzorze (30) możemy określić kolejne (tj  $n$ -te) fale prądu biegnące na linii



Rys. 34. Przypadek wyładowania kondensatora  $C$  uprzednio naładowanego do wartości  $U$  przez linię zwartą na końcu — rys. lewy. Obwód zastępczy, w którym zamiast linii jest odpowiadająca jej indukcyjność — rys. prawy.

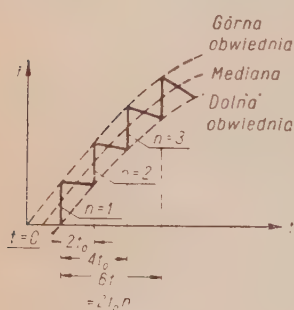
$$n=1 \quad i_1 = \frac{U}{Z} \left[ 1 - \frac{t}{T} + \frac{1}{2} \left( \frac{t}{T} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{t}{T} \right)^3 \right] 1_0,$$

$$n=2 \quad i_2 = \frac{U}{Z} \left[ 1 - 3 \frac{t-2t_0}{T} + 2,5 \left( \frac{t-2t_0}{T} \right)^2 - \frac{1}{6} \left( \frac{t-2t_0}{T} \right)^3 \right] 1_{2t_0},$$

$$n=3 \quad i_3 = \frac{U}{Z} \left[ 1 - 5 \frac{t-4t_0}{T} + 6,5 \left( \frac{t-4t_0}{T} \right)^2 - 4 \frac{1}{6} \left( \frac{t-4t_0}{T} \right)^3 \right] 1_{4t_0},$$

$$n=n \quad i_n = \frac{U}{Z} \left[ 1 - (2n-1) \frac{t-2(n-1)t_0}{T} + \left( n^2 - n + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{t-2(n-1)t_0}{T} \right)^2 - \frac{4n^3 - 6n^2 + 3n - 3}{18} \left( \frac{t-2(n-1)t_0}{T} \right)^3 \right] 1_{2(n-1)t_0} \quad (31)$$

Fala prądu na zwartym krańcu linii podwaja się. Dla dowolnego  $n$  prąd na krańcu będzie  $2 \sum_{n=1}^{n=n} i_n$ . Dla uproszczenia wzorów przyjmiemy



Rys. 35. Przebieg czasowy prądu na zwartym końcu linii z rys. 34.

$2t_0n=t$ , to znaczy ograniczymy wzór do wartości odpowiadających chwilom bezpośrednio poprzedzającym przyjscie do zwartego krańca linii  $(n+1)$ -ej fali<sup>3</sup>. Będzie to dolna obwiednia krzywej schodkowej (rys. 35). Jak wiadomo z poprzednich przypadków, obwiedni ze stałymi skupionymi po eliminacji oporności falo-wej odpowiada mediana górnej i dolnej obwie-  
dni. Znajdziemy jej równanie dodając do  $2 \sum_{n=1}^{n=n} i_n$

wielkość  $U/Z$ . Po odpowiednich przeróbkach matematycznych i wprowadzeniu oznaczenia  $t_0/T=a$  wzór na prąd dla mediany na zwartym końcu linii przyjmie postać:

$$i = \frac{U}{Z} \left\{ 1 + \frac{t}{t_0} \left[ 1 - \frac{1}{3} a + \frac{1}{5} a^2 - \frac{8}{105} a^3 \right] + \left( \frac{t}{t_0} \right)^2 \left[ -\frac{1}{2} a + \frac{1}{3} a^2 - \frac{13}{90} a^3 \right] + \right. \\ \left. + \left( \frac{t}{t_0} \right)^3 \left[ -\frac{1}{6} a + \frac{1}{6} a^2 - \frac{1}{10} a^3 \right] + \left( \frac{t}{t_0} \right)^4 \left[ \frac{1}{24} a^2 - \frac{1}{24} a^3 \right] + \right. \\ \left. + \left( \frac{t}{t_0} \right)^5 \left[ \frac{1}{120} a^2 - \frac{1}{90} a^3 \right] - \left( \frac{t}{t_0} \right)^6 \frac{1}{720} a^3 - \left( \frac{t}{t_0} \right)^7 \frac{1}{5040} a^3 \right\}. \quad (32)$$

<sup>3</sup> W przeciwieństwie do wzorów (2), (3) i (4) i rys. 5, pierwszej fali przydzielono tutaj  $n=1$ , a nie  $n=0$ .



Jeśli stosunek  $a = t_0 T$  jest dostatecznie mały, wzór (32) jest praktycznie identyczny ze wzorem dla sinusoidy, określającej prąd w obwodzie  $CL$  (rys. 34), w którym linia jest zastąpiona przez swą indukcyjność:

$$i = U \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{t+t_0}{\sqrt{LC}} = \frac{U}{Z\sqrt{a}} \sin \frac{\sqrt{a}}{t_0} (t+t_0). \quad (33)$$

We wzorze (33) wstawiono  $(t+t_0)$  zamiast  $t$  ze względu na to, że w obwodzie zastępczym nie występuje opóźnienie  $t_0$ .

Ścisłe biorąc, jeśli pojemność linii  $C_l$  nie jest pomijalna wobec pojemności kondensatora  $C$ , należy we wzorze (33) uwzględnić zmniejszenie wartości szczytowej sinusoidy w stosunku  $C/(C+0,5C_l)$  oraz wartość  $a$  równą  $t_0(C+0,5C_l)Z$ . Wynika to stąd, że układem zastępczym jest układ II.

Rozwijając wzór (33) w szereg, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} i = \frac{U}{Z} & \left\{ \left[ 1 - \frac{1}{6}a + \frac{1}{120}a^2 - \frac{1}{5040}a^3 \right] + \frac{t}{t_0} \left[ 1 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{24}a^2 - \frac{1}{720}a^3 \right] + \right. \\ & + \left( \frac{t}{t_0} \right)^2 \left[ -\frac{1}{2}a + \frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{240}a^3 \right] + \left( \frac{t}{t_0} \right)^3 \left[ -\frac{1}{6}a + \frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{144}a^3 \right] + \\ & + \left( \frac{t}{t_0} \right)^4 \left[ \frac{1}{24}a^2 - \frac{1}{144}a^3 \right] + \left( \frac{t}{t_0} \right)^5 \left[ \frac{1}{120}a^2 - \frac{1}{240}a^3 \right] - \\ & \left. - \left( \frac{t}{t_0} \right)^6 \frac{1}{720}a^3 - \left( \frac{t}{t_0} \right)^7 \frac{1}{5040}a^3 \right\}. \quad (34) \end{aligned}$$

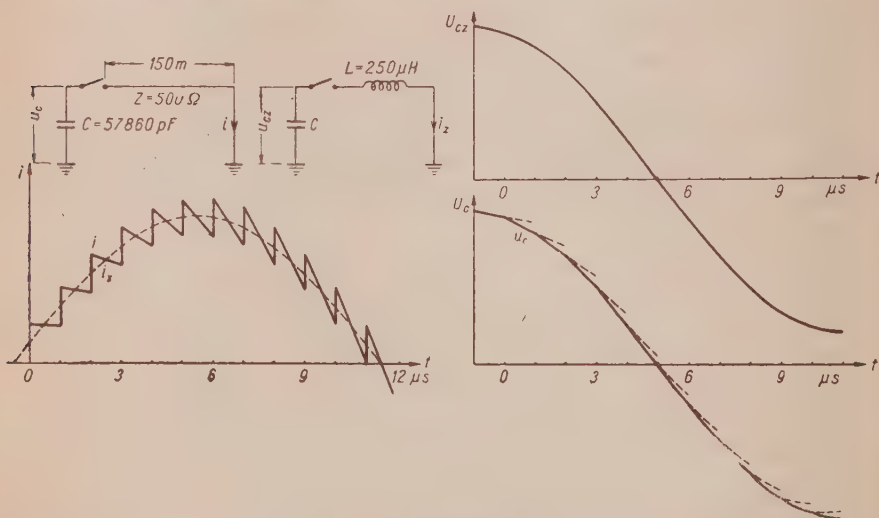
Jak widać z porównania wzorów (32) i (34), przy dostatecznie małym parametrze  $a$  są one identyczne. Tak np. dla przykładu z rys. 36, gdzie  $a = t_0 T = 0,017$ , wzory (32) i (34) dają wynik zgodny, natomiast dla przykładu z rys. 37, gdzie  $a = t_0 T = 0,318$ , wyniki z obu wzorów są różne<sup>1</sup>.

Zależność eliminacji oporności falowej od parametru  $a = t_0 T$  wynika stąd, że im mniejsze jest  $t_0$ , tym bardziej falę można uważać za linię prostą na długości  $2t_0$ . Widać to np. z rys. 38. Ponieważ współczynnik  $\beta$  jest wielkością zmienną w czasie, jego wartość nie może stanowić kryterium ciągłości narastania prądu na linii (w indukcyjności). Za orientacyjny wskaźnik można uważać stosunek amplitudy każdej z fal ( $U/Z$ ) do wartości szczytowej prądu, odpowiadającej obwodowi o stałych skupio-

<sup>1</sup> Do wzoru (32) należy wstawić w tym przypadku  $a = t_0/CZ = 0,318$ , natomiast do wzoru (34)  $a = t_0/(C+0,5C_l)Z = 0,274$  i zamiast  $U$  wartość  $U \cdot C/(C+0,5C_l) = 0,863$ .

nych. Gdy stosunek ten jest mały, można posługiwać się układem o stałych skupionych.

W przypadku gdy nie zachodzi eliminacja oporności falowej, tzn. gdy stosunek  $a=t_0 T$  jest duży, proste układy zastępcze  $T$ ,  $\Pi$ ,  $2T$ ,  $2\Pi$  nie dają dokładnych przybliżeń. W układach tych występuje tylko kilka częstotliwości, podczas gdy rozwiązanie ściśle ma ich nieskończenie wiele. Ilus-



Rys. 36. Prąd  $i$  na końcu zwartym linii ( $Z=500\Omega$ ) po włączeniu kondensatora  $C$  na linię w układzie z rys. lewego. — Prąd  $i_1$  w obwodzie przy zastąpieniu linii przez układ  $\Pi$ , w układzie zastępczym wg rys. prawego.

Napięcie  $u_c$  na kondensatorze  $C$  w układzie z rys. lewego. — Napięcie  $u_{c1}$  na kondensatorze  $C$  w układzie zastępczym z rys. prawego. Dane  $C=57860$  pF,  $l=150$  m.

truje to zestawienie wzorów dla napięcia na  $C$  w przypadku  $C=12590$  pF,  $Z=500\Omega$ ,  $l=600$  m,  $t_0 T=0,318$  oraz odpowiadające zestawieniu rys. 39, 40, 41.

Układ  $\Pi$ :

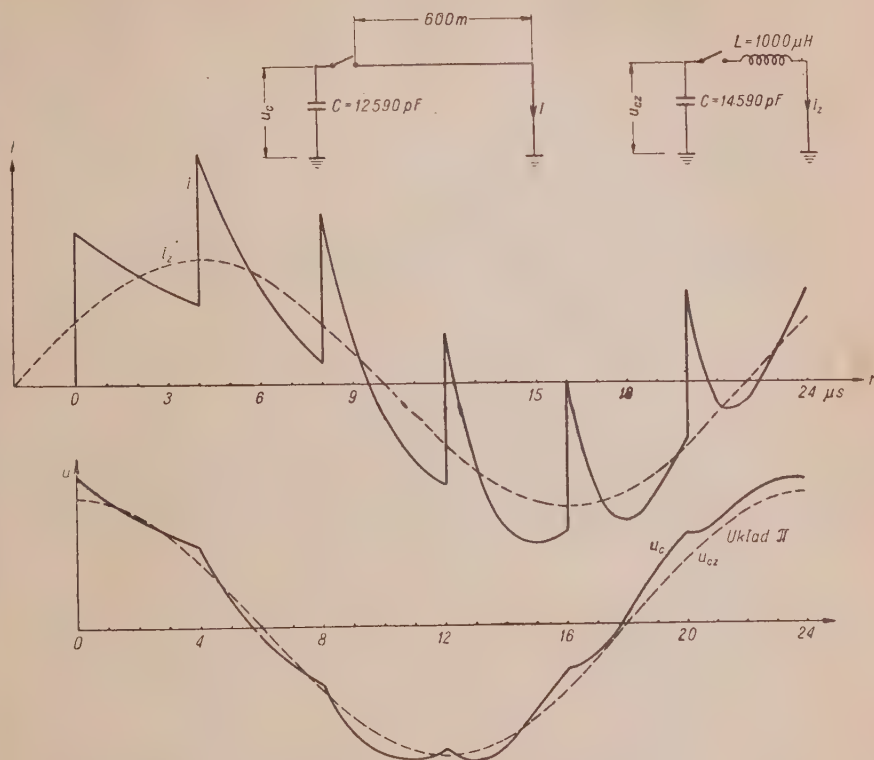
$$u_c = U \cos \frac{t}{24} = U \left[ 1,000 \cos \frac{t}{24,00} \right]. \quad (35)$$

Układ  $T$ :

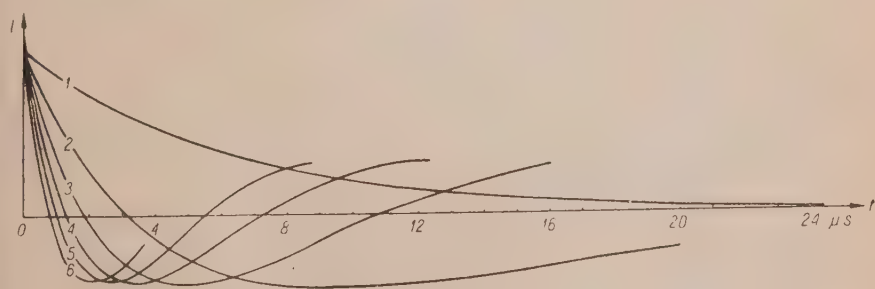
$$u_c = U \left[ 0,915 \cos \frac{t}{23,23} + 0,085 \cos \frac{t}{6,03} \right]. \quad (36)$$

Układ  $2\Pi$ :

$$u_c = U \left[ 0,962 \cos \frac{t}{23,60} + 0,038 \cos \frac{t}{4,36} \right]. \quad (37)$$



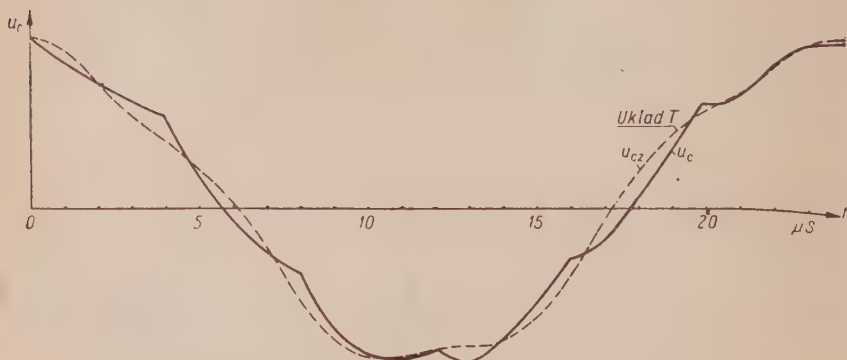
Rys. 37. Jak rys. 36, ale dane:  $C = 12590 \text{ pF}$ ,  $l = 600 \text{ m}$ .



Rys. 38. Kolejne fale prądu ( $i_1, i_2, i_3, \dots$ ) idące z kondensatora  $C$  na linię w układzie z rys. 37.

Układ 2T:

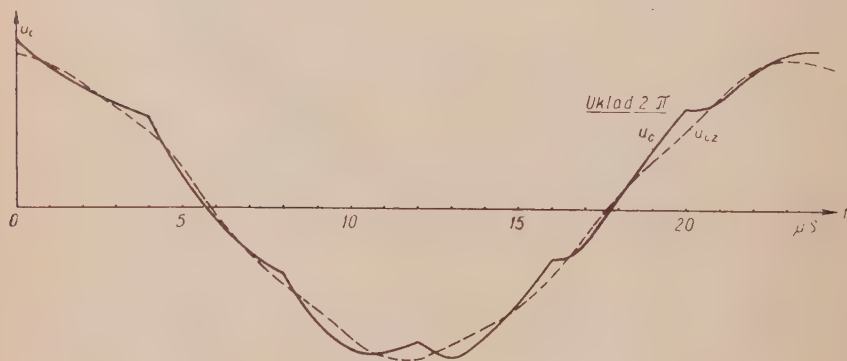
$$u_c = U \left[ 0,904 \cos \frac{t}{23,41} + 0,072 \cos \frac{t}{4,28} + 0,024 \cos \frac{t}{3,11} \right]. \quad (38)$$



Rys. 39. Jak rys. 37.

Napięcie  $u_c$  na kondensatorze C w przypadku załączenia C na linię zwartą na końcu.

Napięcie  $u_{cz}$  na kondensatorze C w przypadku zastąpienia linii przez układ T.

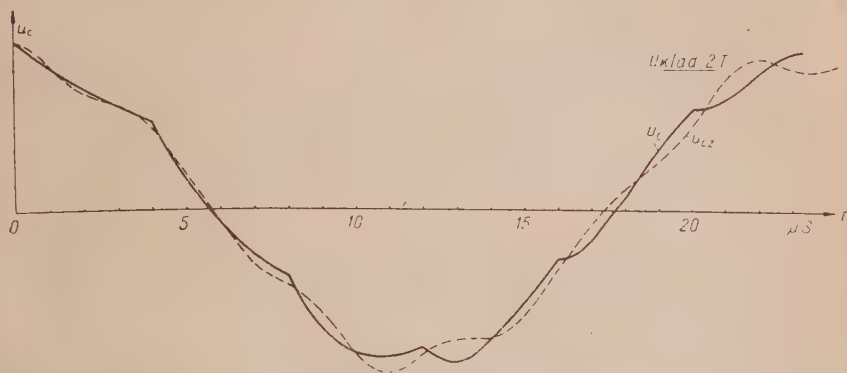


Rys. 40. Jak rys. 38, ale linię zastąpiono układem 2II.

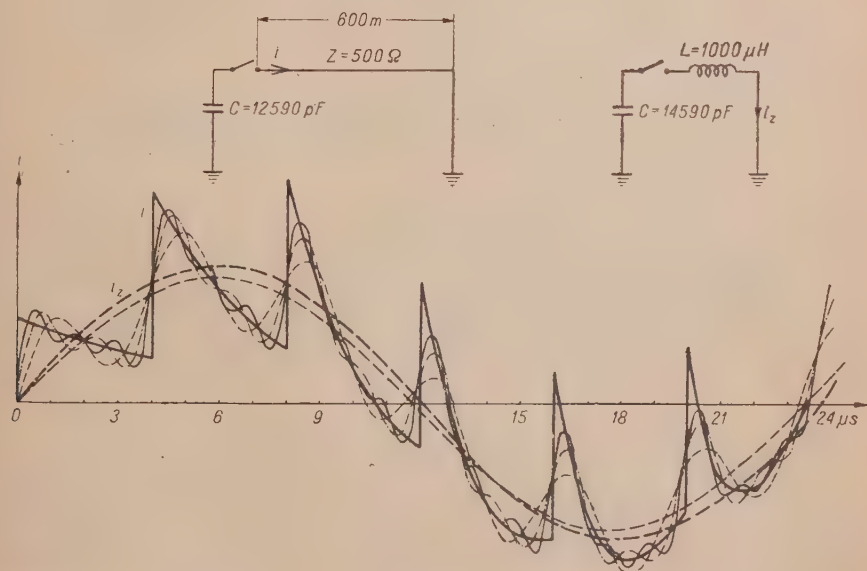
Rozwiązanie ściśle otrzymane przy pomocy rachunku operatorowego wg M. I. Kontorowicza [11]:

$$u_c = U \left[ 0,901 \cos \frac{t}{23,52} + 0,058 \cos \frac{t}{3,88} + \right. \\ \left. + 0,016 \cos \frac{t}{1,98} + 0,007 \cos \frac{t}{1,33} + \dots \right]. \quad (39)$$

Niedoskonałość prostych układów  $II$  i  $T$  przejawia się szczególnie w prądzie, w którym wyższe częstotliwości występują z dużymi amplitudami (rys. 42).



Rys. 41. Jak rys. 38, ale linię zastąpiono układem 2T.



Rys. 42. Prąd  $i$  na początku linii ( $Z = 500 \Omega$ ) zwartej na końcu po włączeniu kondensatora  $C$  w układzie z rys. lewego. Prąd  $i_z$  w obwodzie wg rys. prawego, w którym linia zastąpiona jest układem  $II$ . Linie przerywane przedstawiają sumy składowych o wyższych częstotliwościach (4 składowe): 1., 1 plus 2.; 1. plus 2. plus 3.; 1. plus 2., plus 3., plus 4.



## 5. WYKŁAD

1. Zmierzamy napięcie falowej w stosunku do metody odprężeniowej przy pomocy której możemy mieć do dyspozycji dowolną indukcyjność lub pojemność, a wierzchołki układu II lub C są pomiarowo zabezpieczone przed skutkami wyselekcji.

2. W układach rozłączających przy pomocy odpowiednio dobranych parametrów prądów prądowej wzbudzonej w szeregowej cewce, opornicy falowej, kondensatora z dużym prędkością przebiegu, nadającym go do pomiaru, zakresy wzbudzenia przebiegów przesłanogalowych fal.

3. W układach pomiarowych, wzbudzenie falowej danego odcinka linii można wykonać:

a) przez wzbudzenie fali wzbudzonej na odcinku linii i odpowiadającą jej falę odbicia na jego końcu, a przybliżony przebieg fali przesłanogalowej na długości danego odcinka linii,

b) przez falę wzbudzoną przesłanogalową wierzchołki napięcia lub odpowiednio prądu na końcu fali falowej i odbicia wierzchołki fali, długości odcinka linii, w którym gdy fala odbicia od końca wierzchołki fali, do jego początku — jest równa w kierunku fali, wzbudzenia wierzchołki napięcia lub odpowiednio prądu przesłanogalowej w kierunku kierunku wzbudzenia falowej.

Część fali wzbudzonej na odcinku linii można, uważając z tym, większą rozdzielczością za pomocą, niż w rzeczywistości, jest różnica.

3. W układach rozłączających z szeregowej linii (także z opornościami czynnymi) metoda eliminacji daje tym lepsze wyniki, im całkowity współczynnik odbicia  $\beta$  bliższy jest do 1.

4. W przypadkach gdy zastąpienie odcinka linii przez L lub C nie daje dostatecznej dokładności, konieczne jest stosowanie prostych układów II, 2II, T, 2T. Rachunki są wtedy bardzo złożone, a zbliżenie do przebiegu rzeczywistego niewłaściwe. Lepiej wtedy wyznaczyć wprost przebiegi falowe lub też stosując analizator, brać bardziej złożone układy zastępcze.

## WYKAZ LITERATURY

- [1] Berger R. — Die Bestimmung von Überspannungsableitern durch nahe Blitzanschläge — Bull. 5. R. V. 1942, s. 272.
- [2] Bevilacqua L. V. — Travelling waves — New York 1933, tłumaczenie rosyjskie, Moskwa 1938, s. 46.
- [3] Bevilacqua L. V. — Travelling waves initiated by switching — Trans. AIEE 58, 1939, s. 18.
- [4] Biermann J. — Hochspannung und Hochleistung — Monachium 1940, s. 225.
- [5] Electrical Research Association — Surge Phenomena — Londyn 1941, s. 114.
- [6] Fichtel G. — Überspannungen und Überspannungsschutz — Berlin 1939, 1952.

- [7] Hammarlund P — Transient recovery voltage — Stockholm 1946
- [8] Herlihy I, Knudsen N — Protection contre les surtensions du matériel électrique relié par câble à une ligne aérienne — C. I. G. R. E 1962 s. 324
- [9] Якубовский Я. Л. — О поглотителе Буденберга в Bewlaga на справку выключателей — Прогресс Электротехнический 1936, s. 471.
- [10] Якубовский Я. Л. — Актуальные задачи техники высоких напряжений — Warszawa 1939, s. 47.
- [11] Kontorowicz M. L. — Operacionnoje isczislenije i niestacionarnyje jawlenija w elektriczeskich ciepiach — Moskwa 1939, s. 79.
- [12] Kosiłenka M. W. — Annulirovanie peremagnatnogo i gromozaschita wysokowoltnych ustanowok — Moskwa 1949, s. 44.
- [13] Kosiłenka M. W. — Wykorzystanie potroczajacich w ustanowkach s mnogokrattnymi otrazeniami — Elektrizestwo 1939, s. 65 (obszerne streszczenie patrz pozycja [12]).
- [14] Maszkewitsch L. E. — Pereschnoje procesy i potroczajacich w elektriczeskich ciepiach — Moskwa 1938, s. 131.
- [15] Budenberg B. — Elektrische Schaltvorgänge — Berlin 1923 — 1953 wyd. 1933, s. 496.
- [16] Стрижелецкий Л. С. — Техника высоких напряжений — т. III, Moskwa 1945
- [17] Стрижелецкий Л. С. — Техника молний и громоотведения — Moskwa 1945 s. 134.

Увага: критичне омовінені далшої літератури патрз [7].

И. Л. ЯКУБОВСКИЙ

## КРИТЕРИИ ЭЛИМИНАЦИИ ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ МНОГОКРАТНЫХ ОТРАЖЕНИЯХ

### Резюме

Электронические проблемы в случае многократных отражений волн на отрезке линии с параметрами  $L$  и  $C$  можно приблизительно рассчитывать, заменяя этот отрезок комбинацией  $L$  и  $C$  типа  $\pi$  или  $T$ . Такая замена автор называет элиминацией волнового сопротивления. Однако метод элиминации ведет к упрощению расчетов только в том случае если отрезок линии можно заменить либо емкостью  $C$ , либо индуктивностью  $L$ , то есть комбинацией  $L$  или  $C$  с пренебрежением соответствующей индуктивности или емкости.

При определении критерия элиминации автор анализирует случаи включения  $L$  и  $C$  Бюли (рис. 2). А доказывает, что можно считать эту замену  $L$ , а не коротким замыканием, как это формулировал Бюли.

Электронические проблемы в сетях  $\pi$  и  $T$  заменяются отрезком линии, причем все рассматривается, включая все необходимые детали в схему замещения. Интересна, которую автор с этой целью обобщает (рис. 3).

С целью получения по известным критериям возможности применения элиминации, составляются — с односторонней модификацией — формулы для напряжений и токов в функции времени (общее обозначение  $\psi$ ). Эти формулы относятся к 3-линейному контуру рис. 4, б и 7. Для них формулы формулы (1), (3) и (4), а также (5), (6) и (7) определяют, очевидно, рис. 5 действительных проблем, происходящих от взаимности конт. Второй ряд формул (8), (9) и (10) относится к системам в которых отрезок

В обоих случаях были определены явления для 3 типичных видов приходящих волн:

Будем считать, что форма и величина структурных элементов (рис. 8, 10) постоянны, а длина контура  $l$  и сопротивление  $R$  изменяются с применением элиминации в пределах  $2Z_0 \leq Z_0 \leq 2Z_0$  — см. также рис. 19 и 20 — с соотношением постоянной времени для огибающей к постоянной при элиминации).

Вторым условием применения элиминации волнового сопротивления является малость  $\beta$  (рис. 1, 2) и величина  $\beta$ . Для прямолинейных контуров  $z = (z_1 + z_2) \cdot 2Z_0$  и  $z_1 = 2Z_0$  отрезок линии с сопротивлением  $Z_1$  играет роль сосредоточенной индуктивности  $L$  для каждой волны идущей вперед (на рисунке), начиная с момента  $t_0$  на контуре покрывается на всем протяжении отрезка  $Z_1$  с отраженной волной карьерой  $z_2$ . Это следует из формул (16) — (18) и основано на том, что в каждой точке отрезка  $Z_1$  произвольного времени суммы указанных волн одна и та же и равна  $a_2 (1 + \beta_{22})$ .

Когда контур не прямолинейный, эта зависимость не действительна; когда же пробег  $z$  мало отличается от прямолинейного в границах времени  $t_0$  ( $t_0$  — время пробега волны через отрезок  $Z_2$ ), то она приблизительно правильна.

Вторым условием применения элиминации волнового сопротивления является малая величина скачков средней величины тока или средней величины напряжения, отвечающих моментам покрытия идущей волны с волной отраженной на всей длине отрезка  $Z_1$ . Они будут малы, если очередные скачки близки по величине.

При соблюдении обоих упомянутых условий отрезок линии  $Z_2$  играет роль  $L$  или  $C$ , а величины  $i$  или  $u$  соответствующие ему изменяются непрерывно.

В линейных контурах вышеуказанные условия — для прямолинейных контуров  $z$  — выполняются в полном коэффициенту отражения  $\beta = \beta_{12} \cdot \beta_{22}$  близкому к 1.

Когда коэффициент  $\beta$  мал, замена отрезка  $Z_2$  единичной цепью  $11$  и  $T$  не даёт хорошего приближения (формулы (19) — (22)).

Когда  $\beta$  отрицателен, появляются колебания. Приведенные формулы для огибающей (2), (3) и (4) остаются по-прежнему правильными. Применение элиминации волнового сопротивления в данном случае вообще нецелесообразно, оно к тому же даёт очень плохое приближение (формулы (26) и (27), рис. 24).

На многосекционных контурах (рис. 25) на особое внимание заслуживает контур показанный на рис. 27, в котором  $Z_{1a} = 2Z_0$ ,  $Z_{1b} = 2Z_0$ ,  $Z_2 = Z_0$ . В схеме замещения этого контура (рис. 29) не выступает  $Z_{2a}$ , поэтому можно считать, что элиминация  $Z_2$  является полной (вместо  $Z_2$  — короткое замыкание).

Как пример контура, в котором  $\beta$  является величиной переменной во времени, был рассмотрен контур, показанный на рис. 34, который был уже исследован Л. В. Гуровым [2], Н. С. Стекольниковым [17] и К. Бергером [1]. Для упрощения, вместо первой волны ( $U_1$ )  $U_0 = 100$  идущей на контур после включения выключателя, были взяты 4 члена ряда, который заменяет волну. Основываясь на этом был подсчитан пробег между огибающими кривую тока текущего на коротко-замкнутом конце линии (формулы (32) и (33), рис. 35). На сравнения этого пробега с пробегом полученным при элиминации (34) и (34) следовало, что они тем точнее совпадают, чем короче  $t_0$  (время пробега волны через отрезок линии). Это согласно с вышеуказанным критерием. Так как чем меньше  $t_0$ , тем более приближается к прямой отрезок каждой волны, заключённый в пределах отрезка линии.

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]

[Illegible text]



La seconde condition de l'application de l'élimination consiste dans la petite valeur des bords de la valeur moyenne du courant ou — suivant les conditions — de la tension, qui correspondent aux moments où l'onde incidente se couvre sur toute la longueur du tronçon  $Z_2$  avec l'onde réfléctée. Cette valeur est petite à condition que les bords successifs aient des valeurs rapprochées.

Quand ces deux conditions sont remplies, le tronçon  $Z_2$  joue le rôle de  $L$  ou  $C$  et en même temps les valeurs  $i$  ou  $u$  correspondants au tronçon changent d'une manière presque continue.

Les conditions ci-dessus mentionnées se réduisent pour les circuits à 3-lignes — au cas de la fonction  $s$  rectiligne — à la valeur proche de 1 du coefficient total de réflexion  $\beta = \beta_{12} \cdot \beta_{32}$ .

Au cas où  $\beta$  est petit, on n'obtient pas l'approximation suffisante en remplaçant le tronçon  $Z_2$  par les éléments simples  $I$  et  $T$  [Formules (19) — (22)].

Lorsque le coefficient  $\beta$  est négatif, on obtient des oscillations. Les formules pour l'enveloppe [(2), (3) et (4)] restent valables. L'application de l'élimination est ici inutile; du reste elle ne donne que l'approximation trop inexacte des phénomènes réels (formules (26) et (27), Fig. 24).

Parmi les circuits à plusieurs lignes (Fig. 25), il faut souligner celui de la Fig. 27, où  $Z_{10} = 2Z$ ,  $Z_{11} = 2Z$ ,  $Z_2 = Z$ . Dans son circuit équivalent (Fig. 29) on ne trouve pas  $Z_2$ , on peut donc considérer que l'élimination de  $Z_2$  est complète (c'est-à-dire au lieu du tronçon  $Z_2$ , on a le court-circuit).

Comme l'exemple du circuit avec le coefficient  $\beta$  variable dans le temps, on a pris en considération celui de la Fig. 34, étudié déjà par L. V. Bewley [2], J. S. Stekolnikov [7] et K. Berger [1]. Dans le but de simplifier on a pris, au lieu de la première onde  $(U/Z)e^{-t/CZ}$  entrant dans la ligne après la fermeture du disjoncteur, les 4 termes de la série, qui la remplace. Se basant sur cette approximation, on a calculé l'allure de la médiane des enveloppes de la courbe du courant au bout court-circuité de la ligne (Formule (32), Fig. 35). Ensuite on a comparé cette médiane avec la courbe valable pour l'élimination [(33) et (34)]. Au cours de cette comparaison, on a constaté que les deux courbes sont d'autant plus concordantes que  $t_0$  (temps du parcours des ondes par le tronçon de la ligne) est plus court. Cela concorde avec le critère discuté plus haut, étant donné que plus  $t_0$  est court, plus la partie de l'onde contenue sur le tronçon de la ligne peut être considérée comme rectiligne.

Comme dans le cas étudié auparavant, quand les valeurs de  $t_0$  sont trop grandes, on n'obtient pas l'approximation nécessaire avec les éléments équivalents  $T$ ,  $I$ ,  $2T$  et  $2I$  (formules (35) — (39), Fig. 39—41).



A. KILIŃSKI

## Wartość ścisła wejściowej przewodności linii obciążonej równomiernie w $n$ punktach

*Rękopis dostarczono 23. 6. 1953*

**Streszczenie.** Dotychczasowe przybliżone metody obliczania linii rozgłoszeniowych okazały się za mało dokładne w wielu praktycznych przypadkach. Znana dotychczas metoda ścisła, polegająca na wykonaniu  $n-1$  iteracji przy obliczaniu linii obciążonej w  $n$  punktach, na ogół nie może być stosowana w praktyce jako zbyt uciążliwa. W celu umożliwienia stosowania w praktyce w niektórych typowych dla rozgłaszania przypadkach metody ścisłej zbadano bliżej regułę iteracji i znaleziono, że istnieje możliwość bezpośredniego wyznaczenia wyniku  $n-1$  iteracji dla linii obciążonej równomiernie w  $n$  punktach. Mianowicie między innymi znaleziono, że przewodność wejściowa takiej linii  $Y_{we}^{(n)}$  może być wyznaczona z wyrażenia

$$Y_{we}^{(n)} = Y_0(1 + st) \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \binom{n+i}{2i+2k+1} s^{n-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \binom{n+i}{2i+2k} s^{n-i}}$$

gdzie

- $Y_0$  — przewodność punktu odbiorczego,
- $t$  — tangens hiperboliczny tamowności falowej odcinka linii między sąsiednimi punktami odbiorczymi,
- $s$  — stosunek przewodności falowej linii do przewodności punktu odbiorczego.

W artykule podano również inne postaci wzoru na  $Y_{we}^{(n)}$  dogodne do stosowania w różnych szczególnych przypadkach, zestawione wszystkie razem w rozdziale 8 artykułu.

### 1. WSTĘP

Klasyczną już obecnie metodą obliczania sieci rozgłaszania przewodowego jest metoda Eckersleya [2], który zaproponował traktować je jako obciążone w sposób ciągły. Metoda ta znacznie upraszcza obliczenia, jednak w wielu przypadkach daje błędy większe od dopuszczalnych. Im wyższe wymagania stawiamy rozgłaszaniu przewodowemu, tym trudniej jest pogodzić się z niedokładnościami tej metody. W miarę stosowania coraz doskonalszych środków technicznych i polepszania jakości rozgła-

szania przewodowego powstała konieczność przejścia do ściślejszych metod obliczania. Dotychczas znane teoretycznie ściśle metody są jednak w praktyce nie do przyjęcia jako zbyt pracochłonne. Do obliczenia prostej, typowej linii rozdzielczej wymagają one często wielu milionów operacji rachunku iteracyjnego. Mimo to dla otrzymania metody dokładniejszej od proponowanej przez Eckersleya musimy oprzeć się na metodzie teoretycznie ściślejszej. Aby uczynić ją możliwą do stosowania w praktyce w niniejszym artykule podane zostały dla linii obciążonej równomiernie w  $n$  punktach wzory pozwalające uniknąć uciążliwych iteracji, co skraca wielokrotnie czas obliczania linii rozdzielczej, a niekiedy w ogóle umożliwia obliczenie takiej linii. Podano tu jedynie wzory na przewodność wejściową linii. Wzory do obliczania innych wielkości elektrycznych linii rozdzielczej, obciążonej równomiernie w  $n$  punktach, otrzymuje się w sposób analogiczny do omawianego w niniejszym artykule.

## 2. PRZEWODNOŚĆ WEJŚCIOWA LINII OBCIĄŻONEJ NA KOŃCU

Wyrażenie na oporność wejściową jednorodnej linii obciążonej na końcu może mieć postać

$$Z_{we} = Z_0 \frac{\operatorname{ch} \Gamma + \frac{Z_c}{Z_0} \operatorname{sh} \Gamma}{\operatorname{ch} \Gamma + \frac{Z_0}{Z_c} \operatorname{sh} \Gamma} \quad (1)$$

lub

$$Z_{we} = Z_0 \frac{1 + \frac{Z_c}{Z_0} \operatorname{th} \Gamma}{1 + \frac{Z_0}{Z_c} \operatorname{th} \Gamma} \quad (2)$$

gdzie

- $Z_{we}$  — oporność wejściowa linii,
- $Z_0$  — oporność obciążenia linii,
- $Z_c$  — oporność falowa linii,
- $\Gamma$  — tamowność falowa <sup>2</sup>.

<sup>1</sup> W niniejszym artykule do oznaczenia wartości zespolonych nie stosuje się żadnych specjalnych znaków (np. daszków), natomiast moduły wartości zespolonych, gdyby się trafiły, oznacza się indeksem  $m$  przed oznaczeniem. Na przykład  $mZ_0$ ,  $m^s$  oznaczają moduły wartości zespolonych  $Z_0$ ,  $s$ .

<sup>2</sup> W niniejszym artykule zastosowano terminologię i niektóre oznaczenia używane w podręczniku prof. dra inż. W. Nowickiego „Zasady teletransmisji przewodowej“, PWT, Warszawa 1953.

Przewodność wejściowa linii obciążonej na końcu jest odwrotnością oporności wejściowej:

$$Y_{we} = \frac{1}{Z_{we}} = \frac{1}{Z_0} \frac{1 + \frac{Z_0}{Z_c} \operatorname{th} l}{1 + \frac{Z_c}{Z_0} \operatorname{th} l} = Y_0 \frac{1 + \frac{Y_c}{Y_0} \operatorname{th} l}{1 + \frac{Y_0}{Y_c} \operatorname{th} l} \quad (3)$$

gdzie

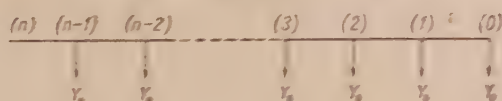
$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} \text{ — przewodność obciążenia linii.}$$

$$Y_c = \frac{1}{Z_c} \text{ — przewodność falowa linii.}$$

### 3. PRZEWODNOŚĆ WEJŚCIOWA LINII OBCIĄŻONEJ RÓWNOMIERNIE W $n$ PUNKTACH

Linie obciążoną równomiernie w  $n$  punktach przedstawia rys. 1. Jest to linia złożona z  $n$  jednakowych odcinków. Przewodności wejściowe

$$Y_{we}^{(1)}, Y_{we}^{(2)}, Y_{we}^{(3)}, \dots, Y_{we}^{(n)}$$



Rys. 1. Linia obciążona równomiernie w  $n$  punktach.

mierzone w punktach 1, 2, 3, ...,  $n$  linii, wynoszą:

$$Y_{we}^{(1)} = Y_0 \frac{1 + \frac{Y_0}{Y_c} \operatorname{th} l}{1 + \frac{Y_c}{Y_0} \operatorname{th} l} \quad (4)$$

$$Y_{we}^{(2)} = (Y_0 + Y_{we}^{(1)}) \frac{1 + \frac{Y_0 + Y_{we}^{(1)}}{Y_c} \operatorname{th} l}{1 + \frac{Y_c}{Y_0 + Y_{we}^{(1)}} \operatorname{th} l} \quad (5)$$

$$Y_{we}^{(3)} = (Y_0 + Y_{we}^{(2)}) \frac{1 + \frac{Y_0 + Y_{we}^{(2)}}{Y_c} \operatorname{th} l}{1 + \frac{Y_c}{Y_0 + Y_{we}^{(2)}} \operatorname{th} l} \quad (6)$$

$$Y_{we}^{(n)} = [Y_0 + Y_{we}^{(n-1)}] \frac{1 + \frac{Y_c}{Y_0 + Y_{we}^{(n-1)}} \operatorname{th} \Gamma}{1 + \frac{Y_0 + Y_{we}^{(n-1)}}{Y_c} \operatorname{th} \Gamma}, \quad (7)$$

gdzie

$Y_{we}^{(n)}$  — przewodność wejściowa linii obciążonej równomiernie w  $n$  punktach.

Oznaczmy

$$\frac{Y_c}{Y_0} = s, \quad (8)$$

$$\operatorname{th} \Gamma = t. \quad (9)$$

Wtedy

$$Y_{we}^{(1)} = Y_0 \frac{1 + st}{1 + \frac{t}{s}} = Y_0 s \frac{1 + st}{s + t} = Y_0 s \frac{a_1}{\beta_1} = Y_c \frac{a_1}{\beta_1}, \quad (10)$$

gdzie

$$a_1 = 1 + st. \quad (11)$$

$$\beta_1 = s + t, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Y_{we}^{(2)} &= Y_0 \left( 1 + s \frac{a_1}{\beta_1} \right) \frac{1 + \frac{s}{1 + s \frac{a_1}{\beta_1}} t}{1 + \frac{1 + s \frac{a_1}{\beta_1}}{s} t} = \\ &= Y_0 s \frac{sa_1 + \beta_1 + \beta_1 st}{sta_1 + \beta_1 s + \beta_1 t} = Y_0 s \frac{sa_1 + a_1 \beta_1}{sta_1 + \beta_1 \beta_1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Wzór (13) podaje regułę iteracji. Mianowicie jeżeli oznaczymy

$$sa_1 + \beta_1 + \beta_1 st = sa_1 + a_1 \beta_1 = a_2. \quad (14)$$

$$sta_1 + \beta_1 s + \beta_1 t = sta_1 + \beta_1 \beta_1 = \beta_2. \quad (15)$$

to

$$Y_{we}^{(2)} = Y_0 s \frac{a_2}{\beta_2} = Y_c \frac{a_2}{\beta_2} \quad (16)$$

oraz

$$\begin{aligned}
 Y_{we}^{(3)} &= Y_0 s \frac{s\alpha_2 + \beta_2 + \beta_2 st}{st\alpha_2 + \beta_2 s + \beta_2 t} = Y_0 s \frac{s\alpha_2 + \alpha_1 \beta_2}{st\alpha_2 + \beta_1 \beta_2} = \\
 &= Y_0 s \frac{\alpha_1 (s^2 + s\beta_1 + \beta_2)}{st\alpha_2 + \beta_1 \beta_2} = Y_0 s \frac{\alpha_3}{\beta_3} = Y_c \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \quad (17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{we}^{(n)} &= Y_0 s \frac{s\alpha_{n-1} + \beta_{n-1} + \beta_{n-1} st}{st\alpha_{n-1} + \beta_{n-1} s + \beta_{n-1} t} = Y_0 s \frac{s\alpha_{n-1} + \alpha_1 \beta_{n-1}}{st\alpha_{n-1} + \beta_1 \beta_{n-1}} = \\
 &= Y_0 s \frac{\alpha_1 (s^{n-1} + s^{n-2} \beta_1 + \dots + s \beta_{n-2} + \beta_{n-1})}{st\alpha_{n-1} + \beta_1 \beta_{n-1}} = \\
 &= Y_0 s \frac{\alpha_n}{\beta_n} = Y_c \frac{\alpha_n}{\beta_n}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= s\alpha_{n-1} + \beta_{n-1} + \beta_{n-1} st = s\alpha_{n-1} + \alpha_1 \beta_{n-1} \\
 &= \alpha_1 (s^{n-1} + s^{n-2} \beta_1 + \dots + s \beta_{n-2} + \beta_{n-1}) = \\
 &= \alpha_1 \sum_{k=1}^n s^{n-k} \beta_{k-1}, \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\beta_n = st\alpha_{n-1} + \beta_{n-1} s + \beta_{n-1} t = st\alpha_{n-1} + \beta_1 \beta_{n-1}, \quad (20)$$

przy czym

$$\alpha_0 = 0; \quad \beta_0 = 1. \quad (21)$$

Prosty dowód indukcyjny wzorów (19) i (20) pominięto.

4. WARTOŚCI  $\alpha$ 

Wielkości  $\alpha$ , wyrażone bezpośrednio w funkcji  $s$  i  $t$ , mają następujące wartości, które otrzymujemy drogą kolejnych obliczeń według wzoru (19):

$$\alpha_1 = 1 + st, \quad (22)$$

$$\alpha_2 = (1 + st)(2s + t), \quad (23)$$

$$\alpha_3 = (1 + st)(3s^2 + 4st + t^2 + s^2 t^2), \quad (24)$$

$$\alpha_4 = (1 + st)(4s^3 + 10s^2 t + 6st^2 + 4s^3 t^2 + 2s^2 t^3 + t^3), \quad (25)$$



$$\alpha_5 = (1+st)(5s^1 - 20s^3t + 21s^2t^2 + 10s^1t^2 + 6 \cdot 2s^3t^3 + 8st^3 + t^1 + 3s^2t^4 + s^1t^4), \quad (26)$$

$$\alpha_6 = (1+st)(6s^5 + 35s^1t + 56s^3t^2 + 20s^5t^2 + 21 \cdot 2s^1t^3 + 36s^2t^3 + 10st^4 + \\ + 8 \cdot 3s^3t^4 + 6s^5t^1 + 3s^4t^5 + 4s^2t^5 + t^5), \quad (27)$$

$$\alpha_7 = (1+st)(7s^6 + 56s^5t + 126s^1t^2 + 35s^6t^2 + 56 \cdot 2s^5t^3 + 120s^3t^3 + 55s^2t^1 + \\ + 36 \cdot 3s^1t^4 + 21s^6t^4 + 8 \cdot 3s^5t^5 + 10 \cdot 4s^3t^5 + 12st^5 + t^6 + 6s^4t^6 + s^6t^6), \quad (28)$$

$$\alpha_n = (1+st) \left[ \binom{n}{1} s^{n-1} + \binom{n+1}{3} s^{n-2}t + \binom{n+2}{5} s^{n-3}t^2 + \dots + \right. \\ + \binom{n}{3} s^{n-1}t^2 + 2 \binom{n+1}{5} s^{n-2}t^3 + 3 \binom{n+2}{7} s^{n-3}t^4 + \dots + \\ + \binom{n}{5} s^{n-1}t^4 + 3 \binom{n+1}{7} s^{n-2}t^5 + 6 \binom{n+2}{9} s^{n-3}t^6 + \dots + \\ \left. + \binom{n}{7} s^{n-1}t^6 + 4 \binom{n+1}{9} s^{n-2}t^7 + 10 \binom{n+2}{11} s^{n-3}t^8 + \dots \right] \quad (29)$$

przy założeniu, że  $\binom{n}{k} = 0$  dla  $k > n$ .

Po uporządkowaniu wyrażenia w nawiasach kwadratowych we wzorze (29) według malejących potęg  $s$  otrzymamy:

$$\alpha_n = (1+st) \left\{ \left[ \binom{0}{0} \binom{n}{1} + \binom{1}{0} \binom{n}{3} t^2 + \binom{2}{0} \binom{n}{5} t^4 + \dots \right] s^{n-1} + \right. \\ + t \left[ \binom{1}{1} \binom{n+1}{3} + \binom{2}{1} \binom{n+1}{5} t^2 + \binom{3}{1} \binom{n+1}{7} t^4 + \dots \right] s^{n-2} + \\ \left. + t^2 \left[ \binom{2}{2} \binom{n+2}{5} + \binom{3}{2} \binom{n+2}{7} t^2 + \binom{4}{2} \binom{n+2}{9} t^4 + \dots \right] s^{n-3} + \dots \right\} \quad (30)$$

przy założeniu, że  $\binom{k}{0} = 1$ , w szczególności  $\binom{0}{0} = 1$ .

Oznaczmy

$$M_0 = \binom{0}{0} \binom{n}{1} + \binom{1}{0} \binom{n}{3} t^2 + \binom{2}{0} \binom{n}{5} t^4 + \dots \quad (31)$$

$$M_1 = t \left[ \binom{1}{1} \binom{n+1}{3} + \binom{2}{1} \binom{n+1}{5} t^2 + \binom{3}{1} \binom{n+1}{7} t^4 + \dots \right], \quad (32)$$

$$M_2 = t^2 \left[ \binom{2}{2} \binom{n-2}{5} - \binom{3}{2} \binom{n-2}{7} t^2 - \binom{4}{2} \binom{n-2}{9} t^4 - \dots \right]. \quad (33)$$

$$M_i = t^i \left[ \binom{i}{i} \binom{n-i}{2i-1} + \binom{i+1}{i} \binom{n-i}{2i-3} t^2 - \binom{i+2}{i} \binom{n-i}{2i-5} t^4 - \dots \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \binom{n+i}{2i+2k+1}, \quad (34)$$

$$M_{n-2} = t^{n-2} \binom{n-2}{n-2} \binom{2n-2}{2n-3} = t^{n-2} (2n-2), \quad (35)$$

$$M_{n-1} = t^{n-1} \binom{n-1}{n-1} \binom{2n-1}{2n-1} = t^{n-1}, \quad (36)$$

$$M_n = t^n \binom{n}{n} \binom{2n}{2n+2} = 0. \quad (37)$$

Wzory (35), (36) i (37) stanowią szczególne przypadki ogólnego wzoru (34).

Jest rzeczą jasną, że  $M_i = 0$  dla  $i > n$ , gdyż wtedy  $n < i-1$  oraz  $n-i < 2i+1$  i tym bardziej  $n-i < 2i-1-2k$  dla  $k=0, 1, 2, \dots$ , to znaczy, że w sumie (34) dla  $i > n$  wszystkie składniki są równe zeru.

Po zastosowaniu powyższych oznaczeń otrzymamy

$$a_n = (1+st) (M_0 s^{n-1} + M_1 s^{n-2} + \dots + M_{n-1} s^0) =$$

$$= \frac{1+st}{s} (M_0 s^n + M_1 s^{n-1} + M_2 s^{n-2} + \dots + M_{n-1} s), \quad (38)$$

albo

$$a_n = \frac{1+st}{s} \sum_{i=0}^n M_i s^{n-i} = \frac{1+st}{s} \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \binom{n-i}{2i+2k+1} s^{n-i}. \quad (39)$$

Na przykład

$$a_3 = \frac{1+st}{s} (M_0 s^5 + M_1 s^4 + M_2 s^3 + M_3 s^2 + M_4 s),$$

przy czym

$$M_0 = \binom{5}{1} + \binom{5}{3} t^2 + \binom{5}{5} t^4 = 5 + 10t^2 + t^4,$$

$$M_1 = t \left[ \binom{6}{3} + \binom{2}{1} \binom{6}{5} t^2 \right] = 20t + 12t^3,$$

$$M_2 = t^2 \left[ \binom{7}{5} + \binom{3}{2} t^2 \right] = 21t^2 + 3t^4,$$

$$M_3 = M_{n-2} = t^3(2 \cdot 5 - 2) = 8t^3.$$

$$M_1 = M_{n-1} = t^4.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} a_5 - \frac{1}{s} st (5s^3 + 20s^1t + 21s^3t^2 + 10s^3t^2 - 12s^4t^3 + 8s^2t^3 - st^4 - 3s^2t^4 + s^1t^4) = \\ = (1+st)(5s^4 + 20s^3t + 21s^2t^2 + 10s^4t^2 + 6 \cdot 2s^2t^3 + 8st^3 + t^4 + 3s^2t^4 - s^1t^4), \end{aligned}$$

co odpowiada wartości (26).

Wyrażenie w nawiasach prostokątnych w równaniu (29), uporządkowane według rosnących potęg  $t$ , może być przedstawione w następujący sposób:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s} \binom{n}{1} s^n, \\ & + \frac{1}{s} \binom{n+1}{3} s^{n-2} t + \\ & + \frac{1}{s} \left[ \binom{n+2}{5} s^{n-2} + \binom{n}{3} s^n \right] t^2 + \\ & + \frac{1}{s} \left[ \binom{n+3}{7} s^{n-3} + 2 \binom{n+1}{5} s^{n-1} \right] t^3 + \\ & + \frac{1}{s} \left[ \binom{n+4}{9} s^{n-4} + 3 \binom{n+2}{7} s^{n-2} + \binom{n}{5} s^n \right] t^4 + \\ & + \frac{1}{s} \left[ \binom{n+5}{11} s^{n-5} + 4 \binom{n+3}{9} s^{n-3} + 3 \binom{n+1}{7} s^{n-1} \right] t^5 + \\ & + \frac{1}{s} \left[ \binom{n+6}{13} s^{n-6} + 5 \binom{n+4}{11} s^{n-4} + 6 \binom{n+2}{9} s^{n-2} + \binom{n}{7} s^n \right] t^6 + \\ & + \frac{1}{s} \left[ \binom{n+7}{15} s^{n-7} + 6 \binom{n+5}{13} s^{n-5} + 10 \binom{n+3}{11} s^{n-3} + 4 \binom{n+1}{9} s^{n-1} \right] t^7 + \dots \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{1}{s} \left[ \binom{i}{0} \binom{n+i}{2i+1} s^{n-i} + \binom{i-1}{1} \binom{n+i-2}{2i-1} s^{n-i+2} + \binom{i-2}{2} \binom{n+i-4}{2i-3} s^{n-i+4} + \dots \right] t^i + \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{1}{s} \left[ \binom{n-1}{0} s + \binom{n-2}{1} s^3 + \binom{n-3}{2} s^5 + \dots \right] t^{n-1}. \end{aligned} \quad (40)$$

Oznaczmy

$$P_0 = \binom{n}{1} s^n, \tag{41}$$

$$P_1 = \binom{n+1}{3} s^{n-1}, \tag{42}$$

$$P_2 = \binom{n+2}{5} s^{n-2} + \binom{n}{3} s^n, \tag{43}$$

$$P_3 = \binom{n+3}{7} s^{n-3} + 2 \binom{n+1}{5} s^{n-1}, \tag{44}$$

.....

$$P_i = \binom{i}{0} \binom{n+1}{2i+1} s^{n-1} + \binom{i-1}{1} \binom{n+i-2}{2i-1} s^{n-i+2} + \binom{i-2}{2} \binom{n-i+4}{2i-3} s^{n-i+4} \dots -$$
  
$$= \sum_{k=0}^i \binom{i-k}{k} \binom{n+i-2k}{2i+1-2k} s^{n-i+2k}. \tag{45}$$

przy założeniu, że  $\binom{k}{0}=1$ , w szczególności  $\binom{0}{0}=1$  oraz że  $\binom{n}{k}=0$  przy  $n < k$ .

Stąd

$$P_{n-1} = \binom{n-1}{0} s + \binom{n-2}{s} s^3 + \binom{n-3}{2} s^5 + \dots \tag{46}$$

$$P_n = 0; \tag{47}$$

bowiem  $P_i=0$  dla  $i \geq n$ .

Otrzymamy zatem

$$a_n = \frac{1+st}{s} (P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \dots + P_{n-1} t^{n-1}) \tag{48}$$

albo

$$a_n = \frac{1+st}{s} \sum_{i=0}^n P_i t^i = \frac{1+st}{s} \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \binom{i-k}{k} \binom{n+1-2k}{2i+1-2k} s^{n-i+2k} t^i. \tag{49}$$

Wartość  $a_3$  obliczona według wzoru (49) wyniesie

$$a_3 = \frac{1+st}{s} (P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + P_3 t^3 + P_4 t^4),$$

gdzie

$$P_0 = 5s^3.$$

$$P_1 = \binom{5+1}{3} s^1 = 20s^1.$$

$$P_2 = \binom{5+2}{5} s^3 + \binom{5}{3} s^5 = 21s^3 + 10s^5,$$

$$P_3 = \binom{5+3}{7} s^2 + 2 \binom{5+1}{5} s^4 = 8s^2 + 2 \cdot 6s^4,$$

$$P_4 = P_{n-1} = \binom{5-1}{0} s + \binom{5-2}{1} s^3 + \binom{5-3}{2} s^5 = s + 3s^3 + s^5.$$

a więc

$$a_s = \frac{1+st}{s} (5s^5 + 20s^4t + 10s^3t^2 + 21s^3t^2 + 6 \cdot 2s^4t^3 + 8s^2t^3 + st^4 + 3s^3t^4 + s^5t^4),$$

co odpowiada wartości (26).

### 5. WARTOŚCI $\beta$

Wartości  $\beta$  wyrażone bezpośrednio w funkcji  $s$  i  $t$  są następujące:

$$\beta_1 = s + t, \quad (50)$$

$$\beta_2 = s^2 + 3st + t^2 + s^2t^2, \quad (51)$$

$$\beta_3 = s^3 + 6s^2t + 5st^2 + 3s^2t^2 + t^3 + 2s^2t^3, \quad (52)$$

$$\beta_4 = s^4 + 10s^3t + 15s^2t^2 + 6s^4t^2 + 7st^3 + 5 \cdot 2s^3t^3 + t^4 + 3s^2t^4 + s^4t^4, \quad (53)$$

$$\beta_5 = s^5 + 15s^4t + 35s^3t^2 + 10s^5t^2 + 28s^2t^3 + 15 \cdot 2s^4t^3 + 9st^4 + 7 \cdot 3s^3t^4 + 5s^5t^4 + \\ + t^5 + 4s^2t^5 + 3s^4t^5, \quad (54)$$

$$\beta_6 = s^6 + 21s^5t + 70s^4t^2 + 15s^6t^2 + 84s^3t^3 + 35 \cdot 2s^5t^3 + 45s^2t^4 + 28 \cdot 3s^4t^4 + \\ + 15s^6t^4 + 11st^5 + 9 \cdot 4s^3t^5 + 7 \cdot 3s^5t^5 + t^6 + 5s^2t^6 + 6s^4t^6 + s^6t^6, \quad (55)$$

.....

$$\beta_n = \binom{n}{0} s^n + \binom{n+1}{2} s^{n-1}t + \binom{n+2}{4} s^{n-2}t^2 + \dots + \\ + \binom{n}{2} s^nt^2 + 2 \binom{n+1}{4} s^{n-1}t^3 + 3 \binom{n+2}{6} s^{n-2}t^4 + \dots + \\ + \binom{n}{4} s^nt^4 + 3 \binom{n+1}{6} s^{n-1}t^5 + 6 \binom{n+2}{8} s^{n-2}t^6 + \dots + \\ + \binom{n}{6} s^nt^6 + 4 \binom{n+1}{8} s^{n-1}t^7 + 10 \binom{n+2}{10} s^{n-2}t^8 + \dots \quad (56)$$



Wyrażenie powyższe, uporządkowane według malejących potęg  $s$ , ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \beta_n = & \left[ \binom{0}{0} \binom{n}{0} + \binom{1}{0} \binom{n}{2} t^2 + \binom{2}{0} \binom{n}{4} t^4 + \dots \right] s^n + \\ & + t \left[ \binom{1}{1} \binom{n+1}{2} + \binom{2}{1} \binom{n+1}{4} t^2 + \binom{3}{1} \binom{n+1}{6} t^4 + \dots \right] s^{n-1} + \\ & + t^2 \left[ \binom{2}{2} \binom{n+2}{4} + \binom{3}{2} \binom{n+2}{6} t^2 + \binom{4}{2} \binom{n+2}{8} t^4 + \dots \right] s^{n-2} + \\ & + t^3 \left[ \binom{3}{3} \binom{n+3}{6} + \binom{4}{3} \binom{n+3}{8} t^2 + \binom{5}{3} \binom{n+3}{10} t^4 + \dots \right] s^{n-3} + \dots \end{aligned} \tag{57}$$

Jeżeli oznaczymy

$$N_0 = \binom{0}{0} \binom{n}{0} + \binom{1}{0} \binom{n}{2} t^2 + \binom{2}{0} \binom{n}{4} t^4 + \dots \tag{58}$$

$$N_1 = t \left[ \binom{1}{1} \binom{n+1}{2} + \binom{2}{1} \binom{n+1}{4} t^2 + \binom{3}{1} \binom{n+1}{6} t^4 + \dots \right] \tag{59}$$

$$N_2 = t^2 \left[ \binom{2}{2} \binom{n+2}{4} + \binom{3}{2} \binom{n+2}{6} t^2 + \binom{4}{2} \binom{n+2}{8} t^4 + \dots \right] \tag{60}$$

$$\begin{aligned} N_i = & t^i \left[ \binom{i}{i} \binom{n+i}{2i} + \binom{i+1}{i} \binom{n+i}{2i+2} t^2 + \binom{i+2}{i} \binom{n+i}{2i+4} t^4 + \dots \right] \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i+k}{i} \binom{n+i}{2i+2k} t^{i+2k} \end{aligned} \tag{61}$$

$$N_{n-1} = t^{n-1} \binom{n-1}{n-1} \binom{2n-1}{2n-2} = (2n-1) t^{n-1}, \tag{62}$$

$$N_n = t^n \binom{n}{n} \binom{2n}{2n} = t^n, \tag{63}$$

to

$$\beta_n = N_0 s^n + N_1 s^{n-1} + N_2 s^{n-2} + \dots + N_{n-1} s + N_n \tag{64}$$

lub

$$\beta_n = \sum_{i=0}^n N_i s^{n-i} = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i+k}{i} \binom{n+i}{2i+2k} t^{i+2k} s^{n-i} \tag{65}$$

$N_i = 0$  dla  $i > n$ , gdyż wtedy  $2i + 2k > 2i > n + i$  dla  $k = 0, 1, 2, \dots$  tzn. wszystkie składniki sumy we wzorze (61) są równe zeru.

Sprawdzimy wzór (65) przez obliczenie  $\beta_5$ :

$$\beta_5 = N_0 s^5 + N_1 s^4 + N_2 s^3 + N_3 s^2 + N_4 s + N_5.$$

gdzie

$$N_0 = 1 + 10t^2 + 5t^4,$$

$$N_1 = 15t + 30t^3 + 3t^5,$$

$$N_2 = 35t^2 + 21t^4,$$

$$N_3 = 28t^3 + 4t^5,$$

$$N_4 = N_{n-1} = 2 \cdot 5 \cdot 1t^1 = 9t^1,$$

$$N_5 = N_n = t^5.$$

Wobec tego

$$\beta_5 = s^5 + 10s^5t^2 + 5s^5t^4 + 15s^4t + 30s^4t^3 + 3s^4t^5 + 35s^3t^2 + 21s^3t^4 + 28s^2t^3 + 4s^2t^5 + 9st^1 + t^5,$$

co odpowiada wartości (54).

Prawa strona równania (56), uporządkowana według rosnących potęg  $t$ , ma następującą postać:

$$\begin{aligned} \beta_n = & \binom{0}{0} \binom{n}{0} s^n + \\ & + \binom{1}{1} \binom{n+1}{2} s^{n-1} t + \\ & + \left[ \binom{2}{2} \binom{n+2}{4} s^{n-2} + \binom{1}{0} \binom{n}{2} s^n \right] t^2 + \\ & + \left[ \binom{3}{3} \binom{n+3}{6} s^{n-3} + \binom{2}{1} \binom{n+1}{4} s^{n-1} \right] t^3 + \\ & + \left[ \binom{4}{4} \binom{n+4}{8} s^{n-4} + \binom{3}{2} \binom{n+2}{6} s^{n-2} + \binom{2}{0} \binom{n}{4} \right] t^4 + \\ & + \left[ \binom{i}{i} \binom{n+i}{2i} s^{n-i} + \binom{i-1}{i-2} \binom{n+i-2}{2i-2} s^{n-i+2} + \binom{i-2}{i-4} \binom{n+i-4}{2i-4} s^{n-i+4} + \dots \right] t^i + \\ & + \left[ 1 + \binom{n-1}{n-2} s^2 + \binom{n-2}{n-4} s^4 + \dots \right] t^n. \end{aligned} \quad (66)$$

Jeżeli oznaczymy

$$Q_0 = \binom{n}{0} s^n, \quad (67)$$

$$Q_1 = \binom{1}{1} \binom{n+1}{2} s^{n-1}, \quad (68)$$

$$Q_2 = \binom{2}{2} \binom{n+2}{4} s^{n-2} + \binom{1}{0} \binom{n}{2} s^n, \quad (69)$$

$$Q_3 = \binom{3}{3} \binom{n+3}{6} s^{n-3} + \binom{2}{1} \binom{n+4}{4} s^{n-1}, \quad (70)$$

$$\begin{aligned} Q_i &= \binom{i}{i} \binom{n+i}{2i} s^{n-i} + \binom{i-1}{i-2} \binom{n+i-2}{2i-2} s^{n-i+2} + \binom{i-2}{i-4} \binom{n+i-4}{2i-4} s^{n-i+4} + \dots + \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i-k}{i-2k} \binom{n+i-2k}{2i-2k} s^{n-i+2k}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$Q_n = 1 + \binom{n-1}{n-2} s^2 + \binom{n-2}{n-4} s^4 + \dots \quad (72)$$

to wtedy

$$\beta_n = Q_0 + Q_1 t + Q_2 t^2 + Q_3 t^3 + \dots + Q_n t^n \quad (73)$$

lub

$$\beta_n = \sum_{i=0}^n Q_i t^i = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \binom{i-k}{i-2k} \binom{n+i-2k}{2i-2k} s^{n-i+2k} t^i. \quad (74)$$

Jak poprzednio, sprawdzimy wzór (73) przez obliczenie  $\beta_5$ .

$$\beta_5 = Q_0 + Q_1 t + Q_2 t^2 + Q_3 t^3 + Q_4 t^4 + Q_5 t^5.$$

ale

$$Q_0 = s^5,$$

$$Q_1 = 15s^4,$$

$$Q_2 = 35s^3 + 10s^5,$$

$$Q_3 = 28s^2 + 2 \cdot 15s^4,$$

$$Q_4 = 9s + 3 \cdot 7s^3 + 5s^5,$$

$$Q_5 = Q_n = 1 + 4s^2 + 3s^4,$$

wobec czego

$$\gamma_1 = s^2 - 15st + 35s^2t^2 - 10s^3t^3 + 28s^4t^4 - 15s^5t^5 + 9s^6t^6 - 7s^7t^7 + 5s^8t^8 - t^9 - 4s^4t^4 + 3s^5t^5,$$

co odpowiada wartości (54) poprzednio obliczonej.

## 6. DOWÓD INDUKCYJNY WZORÓW NA $\alpha_n$ I $\beta_n$

Dla przeprowadzenia dowodu posłużymy się wzorami (39) i (65) o następującej postaci

$$\alpha_n = \frac{1+st}{s} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \binom{n+i}{2i+2k-1} s^{n-i}, \quad (39)$$

$$\beta_n = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \binom{n+i}{2i+2k} s^{n-i}. \quad (65)$$

Po pierwsze stwierdzamy, że są one słuszne dla  $n=1$ . Istotnie

$$\alpha_1 = 1 + st, \quad (22)$$

$$\beta_1 = s + t. \quad (50)$$

Następnie założymy, że — jak być powinno — wzory na  $\alpha_n$  i  $\beta_n$  są słuszne dla liczby  $n$ , oraz wykazemy, że są one słuszne również dla  $n+1$ .

Istotnie, na podstawie wzorów (19) i (20) według reguły iteracji (której dowód jest bezpośredni) mamy

$$\alpha_{n+1} = s\alpha_n + \alpha_{n-1}, \quad (75)$$

$$\beta_{n+1} = st\alpha_n + \beta_1\beta_n. \quad (76)$$

skąd

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= (1+st) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \binom{n+i}{2i+2k+i} s^{n-1} + \\ &+ (1+st) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \binom{n+i}{2i+2k} s^{n-i} = \\ &= (1+st) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \left[ \binom{n-i}{2i+2k+1} + \binom{n+i}{2i+2k} \right] s^{n-1}. \end{aligned} \quad (77)$$

Opierając się na znanym wzorze z teorii kombinacji  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n-1}{k}$  oraz dzieląc i mnożąc przez  $s$  otrzymamy ostatecznie

$$a_{n+1} = \frac{1+st}{s} \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \binom{n+1+i}{2i+2k+1} s^{n+1-i}, \quad (72)$$

a więc wzór o tej samej budowie co (39).

Analogiczny dowód wzoru na  $\beta_n$  pominiemy.

## 7. WZORY OBLICZENIOWE NA PRZEWODNOŚĆ WEJŚCIOWĄ LINII OBCIĄŻONEJ RÓWNOMIERNIE W $n$ PUNKTACH

Po postawieniu wartości (38) i (64) lub (39) i (65) do wzoru (13) otrzymamy:

$$Y_{we}^{(n)} = Y_0(1-st) \frac{M_0 s^n + M_1 s^{n-1} + M_2 s^{n-2} + \dots + M_{n-1} s}{N_0 s^n + N_1 s^{n-1} + N_2 s^{n-2} + \dots + N_{n-1} s + N_n} \quad (79)$$

lub

$$Y_{we}^{(n)} = Y_0(1-st) \frac{\sum_{i=0}^n M_i s^{n-i}}{N_0 s^n + N_1 s^{n-1} + \dots + N_{n-1} s + N_n} = Y_0(1-st) \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \binom{n-i}{2i+2k+1} s^{n-i}}{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i t^{i+2k} \binom{i+k}{i} \binom{n+i}{2i+2k} s^{n-i}} \quad (80)$$

Jeżeli zaś podstawimy do wzoru (13) wartości (48) i (73) oraz (49) i (74) otrzymamy

$$Y_{we}^{(n)} = Y_0(1-st) \frac{P_0 + P_1 t + P_2 t^2 + \dots + P_{n-1} t^{n-1}}{Q_0 + Q_1 t + Q_2 t^2 + \dots + Q_n t^n} \quad (81)$$

lub

$$Y_{we}^{(n)} = Y_0(1+st) \frac{\sum_{i=0}^n P_i t^i}{\sum_{i=0}^n Q_i t^i} = Y_0(1+st) \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \binom{i-k}{k} \binom{n+i-2k}{2i+1-2k} s^{n-i+2kt}}{\sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \binom{i-k}{i-2k} \binom{n+i-2k}{2i-2k} s^{n-i+2kt}} \quad (82)$$

Wzory (79) i (80) sprowadzimy do prostszych postaci przez pomnożenie wyrażenia  $(1+st)$  przez licznik ułamka:

$$(1+st) \sum_{i=0}^n M_i s^{n-i} = M_0 t s^{n+1} + M_1 t s^n + M_2 t s^{n-1} + \dots + M_{n-1} t s^2 + M_n s^2 + M_1 s^n + M_2 s^{n-1} + \dots + M_{n-1} s^2 + M_n$$



$$M_0 s^{n+1} = M_0 - M_1 s + M_2 s^2 - M_3 s^3 + \dots + M_{n-1} s^{n-1} - M_n s^n + M_{n+1} s^{n+1} - \dots$$

$$\sum_{i=0}^n M_i s^{n-i} = s \sum_{i=0}^n M_i s^{n-i-1} \quad (82)$$

gdzie

$$M'_0 = M_0 t, \quad (83)$$

$$M'_1 = M_0 - M_1 t, \quad (84)$$

$$M'_2 = M_1 - M_2 t, \quad (85)$$

$$M'_i = M_{i-1} + M_i t, \quad (86)$$

$$M'_{n-1} = M_{n-2} - M_{n-1} t, \quad (87)$$

$$M'_n = M_{n-1}, \quad (88)$$

stad

$$Y_{we}^{(n)} = Y_0 s \frac{\sum_{i=0}^n M_i s^{n-i}}{\sum_{i=0}^n N_i s^{n-i}} = Y_c \frac{\sum_{i=0}^n M_i s^{n-i}}{\sum_{i=0}^n N_i s^{n-i}} \quad (89)$$

Analogicznie

$$\begin{aligned} (1+st) \sum_{i=0}^n P_i t^i &= P_0 st + P_1 st^2 + P_2 st^3 + \dots + P_{n-1} st^n + P_n st^{n+1} + P_{n+1} st^{n+2} + \dots \\ &= P_0 s + P_1 s t + P_2 s t^2 + \dots + P_n s t^n + P_{n+1} s t^{n+1} + \dots \\ &= P_0 + (P_0 s + P_1) t + (P_1 s + P_2) t^2 + \dots + (P_{n-1} s + P_n) t^n + P_n s t^{n+1} + \dots \end{aligned}$$

gdzie

$$= \sum_{i=0}^n P'_i t^i, \quad (90)$$

$$P'_0 = P_0, \quad (91)$$

$$P'_1 = P_0 s + P_1, \quad (92)$$

$$P'_2 = P_1 s + P_2, \quad (93)$$

$$P'_i = P_{i-1} s + P_i, \quad (94)$$

$$P'_n = P_{n-1} s + P_n, \quad (95)$$

$$P'_{n+1} = P_n s, \quad (96)$$

where

$$P_{\text{sum}} = \sum_{i=1}^n P_i$$

$$Q_{\text{sum}} = \sum_{i=1}^n Q_i$$
(3)

where  $P_i$  and  $Q_i$  are the  $i$ th components of  $P$  and  $Q$  respectively.

$$P_{\text{sum}} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$
(4)

$$Q_{\text{sum}} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$
(5)

$$P_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n q_{ij}$$
(6)

$$P_{\text{sum}} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

$$Q_{\text{sum}} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$
(7)

$$P_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n q_{ij}$$
(8)

$$P_{\text{sum}} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

$$Q_{\text{sum}} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$
(9)

$$P_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^n q_{ij}$$
(10)

$$P_{\text{sum}} = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$
(11)

$$Q_{\text{sum}} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$$
(12)

$$P_i = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i-k}{k} \binom{n+i-2k}{2i+1-2k} s^{n-i+2k}, \quad (45)$$

$$Q_i = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i-k}{i-2k} \binom{n+i-2k}{2i-2k} s^{n-i+2k}. \quad (47)$$

### 9. LINIA NIEOBCIĄŻONA

Przewodność wejściową linii nieobciążonej  $Y_{we0}^{(n)}$ , tj. linii, w której  $Y_0=0$ , a więc  $s^{-1}=0$ , wyznaczymy np. ze wzoru (90).

We wzorze tym po podstawieniu  $Y_0=0$  mamy

$$Y_0(1+st) = Y_0 + Y_0 \frac{Y_c}{Y_0} t = Y_{ct}, \quad (99)$$

a ułamek po pomnożeniu licznika i mianownika przez  $s^{-n}$  wynosi

$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} M_i s^{n-i}}{\sum_{i=0}^{\infty} N_i s^{n-i}} = \frac{M_0 + M_1 s^{-1} + M_2 s^{-2} + \dots}{N_0 + N_1 s^{-1} + M_2 s^{-2} + \dots} = \frac{M_0}{N_0}. \quad (100)$$

Wobec tego

$$Y_{we0}^{(n)} = Y_{ct} \frac{M_n}{N_0} = Y_c \frac{\binom{n}{1} t + \binom{n}{3} t^3 + \binom{n}{5} t^5 + \dots}{\binom{n}{0} + \binom{n}{2} t^2 + \binom{n}{4} t^4 + \dots} = Y_c \operatorname{thn} \Gamma, \quad (101)$$

bowiem

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k+1} \operatorname{th}^{2k+1} \Gamma}{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k} \operatorname{th}^{2k} \Gamma} = \operatorname{thn} \Gamma. \quad (102)$$

Jeżeli  $\Gamma$  ma wartość skończoną, to gdy  $n \rightarrow \infty$ , przewodność wejściowa

$$Y_{we}^{\infty} \rightarrow Y. \quad (103)$$

### 10. LINIA ZWARTA W PUNKTACH OBCIĄŻENIA

Kiedy przewodności  $Y_0$  są nadzwyczaj wielkie, tj. gdy można przyjąć, że

$$\frac{1}{Y_0} = 0,$$

a więc gdy  $s=0$ , przewodność wejściowa linii wynosi

$$Y_{wez}^{(n)} = Y_0 s (1 + st) \frac{M_0 s^{n-1} + M_1 s^{n-2} + \dots + M_{n-1}}{N_0 s^n + N_1 s^{n-1} + \dots + N_{n-1} s + N_n} =$$

$$= Y_c \frac{M_{n-1}}{N_n} = Y_c \frac{t^{n-1}}{t^n} = \frac{Y_c}{\text{th } \Gamma} \quad (104)$$

niezależnie od  $n$ .

Należy zauważyć, że

$$Y_{wez}^{(n)} \rightarrow Y, \quad \text{gdy } \text{th } \Gamma \rightarrow 1 \quad \text{to jest } \Gamma \rightarrow \infty. \quad (105)$$

# 11. LINIA Z ODCINKÓW O BARDZO DUŻEJ TAMOWNOŚCI FALOWEJ

Gdy długość  $l$  odcinka linii lub tamowność jednostkowa rośnie, wtedy  $t \rightarrow 1$ . W przypadku granicznym  $t=1$ . Dla tego przypadku

$$Y_{we}^{(n)} = Y_0 (1 + s) \frac{M_0 s^n + M_1 s^{n-1} + \dots + M_{n-1} s}{N_0 s^n + N_1 s^{n-1} + \dots + N_{n-1} s + N_n}, \quad (106)$$

przy czym

$$M_0 = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots = \sum_{k=0}^n \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}, \quad (107)$$

$$M_1 = \binom{n+1}{3} + \binom{2}{1} \binom{n+1}{5} + \binom{3}{1} \binom{n+1}{7} + \dots, \quad (108)$$

$$M_2 = \binom{n+2}{5} + \binom{3}{2} \binom{n+2}{7} + \binom{4}{2} \binom{n+2}{9} + \dots \quad (109)$$

i tak dalej.

Podobnie

$$N_0 = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \sum_{k=0}^n \binom{n}{2k} = 2^{n-1}. \quad (110)$$

$$N_1 = \binom{n+1}{2} + \binom{2}{1} \binom{n+1}{4} + \binom{3}{1} \binom{n+1}{6} + \dots \quad (111)$$

$$N_2 = \binom{n+2}{4} + \binom{3}{2} \binom{n+2}{6} + \binom{4}{2} \binom{n+2}{8} + \dots \quad (112)$$

i tak dalej.

Przy tych wartościach  $M_i$  oraz  $N_i$  ułamek

$$\frac{M_0 s^n + M_1 s^{n-1} + \dots + M_{n-1} s}{N_0 s^n + N_1 s^{n-1} + \dots + N_{n-1} s + N_n} = \frac{s}{1+s}, \quad (113)$$

wobec czego

$$Y_{we}^{(n)} = Y_0 s = Y_c, \quad (114)$$

co jest oczywiste.

Również zrozumiałe jest, że w danym przypadku

$$Y_{we0}^{(n)} = Y_{wez}^{(n)} = Y_c. \quad (115)$$

## 12. LINIA Z ODCINKÓW O BARDZO MAŁEJ TAMOWNOŚCI FAŁOWEJ

W takiej linii, kiedy długości  $l$  odcinków lub tamowność jednostkowa maleją do zera,  $t \rightarrow 0$ . W przypadku granicznym, gdy  $t=0$ , mamy

$$Y_{we}^{(n)} = Y_0 \frac{M_0}{N_0}. \quad (116)$$

Ale w danym przypadku

$$M_0 = \binom{n}{1} = n, \quad (117)$$

$$N_0 = \binom{n}{0} = 1. \quad (118)$$

Zatem

$$Y_{we}^{(n)} = n Y_0, \quad (119)$$

co było do przewidzenia.

## 13. WNIOSKI

Z poprzednich rozważań widać, że dokładność wzorów przybliżonych jest całkowita w szczególnych przypadkach, niewątpliwie jest wystarczająca w pewnych określonych zakresach zastosowań praktycznych, a niedostateczna w innych przypadkach, jak to wykazała praktyka ostatnich lat (patrz referat I. A. Szamszina (ZSRR) na VI zjeździe Technicznej Komisji OIR). Wyprowadzone wzory teoretycznie ścisłe w znacznym stopniu ułatwiają wyznaczenie granic, w których mogą być stosowane wzory przybliżone. Poza tymi granicami musielibyśmy posługiwać się dość skomplikowanymi wzorami ścisłymi. Jednakże przedstawienie wzorów ścisłych w postaci krzywych uniwersalnych w radykalny sposób uprościłoby obliczenia techniczne, dając możliwość wykonywania tych obliczeń z założoną, praktycznie uzasadnioną dokładnością.

## WYKAZ LITERATURY

- [1] Nowicki W. — Zasady teletransmisji przewodowej — t. 1, PWT. 1953.
- [2] Orłow M. S. — Электрический расчёт трансляционных сетей вешечания. — Moskwa 1944.
- [3] Szamszin I. A. — Вопросы типизации системов итд. — referat na VI zjeździe Technicznej Komisji OIR w dniu 29. IV. 1952.



А. КИЛИНСКИ

# ТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ВХОДНОЙ ПОЛНОЙ ПРОВОДИМОСТИ ЛИНИЙ НАГРУЖЕННОЙ РАВНОМЕРНО В $n$ ТОЧКАХ

## Резюме

Практикой обнаружено [3], что точность применяемых до сих пор приближённых методов расчёта сетей вещания [2] во многих случаях неудовлетворительна. Метод точного расчёта, в котором применяется итеративное (повторяющееся) исчисление параметров линии ( $n-1$  вычислений для линии нагруженной в  $n$  точках) в большинстве случаев неприменим из-за его сложности. Для возможности практического применения автором найден способ непосредственного определения результата  $n-1$  итеративных действий. А именно, исходя из общеизвестного выражения (1), определяющего входное сопротивление линии, после преобразования его в выражение (3) и после применения обозначений (8) и (9) получаются формулы (10), (16), (17) и (18), определяющие входную проводимость линии в точках 1, 2, 3, ...,  $n$  (см. рис. 1). В этих формулах числитель и знаменатель вычисляются итеративным методом по правилам выраженным формулами (19) и (20). Применяя формулы (10), (16), (17) и (18), автор вычисляет значения числителя (формулы 22—28) и знаменателя (формулы 50—55) для  $n=1, 2, 3, \dots$ . Оказалась, однако, возможной такого рода группировка членов числителя и знаменателя, при которой общая формула для числителя принимает вид формулы (28) или одной из формул (30), (38), (39), (48) и (49), в то время как общая формула для знаменателя принимает вид формулы (56) или одной из формул (57), (64), (65), (73) и (74).

Выше указанные общие точные формулы позволяют вычислить значения входной полной проводимости равномерно нагруженной в  $n$  точках линии, если даны параметры линии ( $s$  и  $t$ ) и проводимость нагрузки ( $Y_0$ ). Для этой цели служат формулы (79—82) или формулы (90) и (91).

Дальше рассмотрены некоторые особые случаи применения общих формул, а именно к расчёту ненагруженной линии (9 пункт статьи), линии коротко замкнутой в точках нагрузки (10 п. ст.), линии состоящей из участков с большим затуханием (11 п. ст.) и наконец линии состоящей из очень коротких участков (12 п. ст.).

В заключении автор предлагает представить выведенные формулы в форме графиков для дальнейшего облегчения расчётов.

A. KILIŃSKI

## THE EXACT VALUE OF INPUT ADMITTANCE IN A LINE LOADED UNIFORMLY AT $n$ POINTS

## Summary

The existing approximate methods of calculating loud-speaker-distribution-lines [2] have in many cases proved to be too inaccurate [3]. The well known exact method which consists in making  $n-1$  iterations, when calculating a line loaded at  $n$  points, generally cannot be applied in practice if  $n$  is larger than several, as it becomes too cumbersome. In order to make possible practical application of the exact method of calculating the input admittance of a line in certain cases typical for broadcasting, a method has been found to determine directly the result of  $n-1$  iterations. The known equation for the input impedance (1) has been transformed into formula (3), and then there have been written expressions (10), (16), (17), (18) for the input admittances in the line at points 1, 2, 3,  $n$  for a line, as shown on the

Fig. 1 using abbreviations (8) and (9). The numerator and denominator in these expressions are found by iteration, the rule of which is given by equations (19) and (20). By means of these equations, the consecutive values of the nominator and denominator for  $n=1, 2, 3 \dots$  have been calculated. It appeared that the factors of the numerator and denominator may be grouped, together in a way shown by equations (22) to (28) and (50) to (55). From these equations it followed that a general expression for the numerator has the form (29) or one of the forms (30), (38), (39), (48), (49), and the general expression for the denominator has the form (56) or one of the forms (57), (64), (65), (73), (74).

The above general expressions allow to calculate the input admittance in a line uniformly loaded at  $n$  points, directly from the given line-parameters ( $s$  and  $t$ ) and the given line-load admittance  $Y_0$  by means of the equations (79), (80), (81), (82), or (90), (98).

The author has then considered some particular cases of applying the exact formulae for calculation of an unloaded line (p. 9), of a line shorted at the points of loading (p. 10), of a line composed of highly damped sections (p. 11) and a line composed of very short sections (p. 12).

Finally it has been proposed to represent the exact formulae graphically to simplify further the use of these formulae.



## WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim, francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem, o ile możliwości, terminologii w języku rosyjskim oraz w języku obcym.
4. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odpowiadający numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
5. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
6. Wszystkie tablice (unikając zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
8. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt przy przesyłaniu korekty swej pracy.

**U w a g a:** Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki“, Warszawa, Koszykowa 75, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki PAN.

Cena zł 10.—